

Utfordrende

Puslerier

for deg som kan litt sannsynlighetsregning

samlet
av
Jostein Lillestøl

[Innholdsliste](#)

Disse pusleriene har vært mitt bidrag til en puslerispalte i bladet Tilfeldig Gang (TG), medlemsbladet til Norsk Statistisk Forening. Spalten startet i 1990 og går fram til 2014.

Puslerier: Innholdsliste

1. Kinokø: Hvilken plass velger du? [klikk](#)
2. Amøbekoloni: Sjanse for å dø ut. [klikk](#)
3. Buss i motsatt retning: Hvorfor kommer de oftere? [klikk](#)
4. Auksjonsformer: Hva er best for selger? [klikk](#)
5. Tre myntkastproblemer. [klikk](#)
6. Forhold med ett-tall som første gjeldende siffer: Hvor sannsynlig? [klikk](#)
7. Terningkast med gevinst sum øyne inntil «ener»: Optimal stopping. [klikk](#)
8. Sokkeparproblemer [klikk](#)
9. Terningkast med ukjent overmalt side med nullgevinst. [klikk](#)
10. Sannsynlighet for å oppnå YATZY. [klikk](#)
11. Komite med flertallsvedtak og sovende komited medlem [klikk](#)
12. Laboratorium – vannprøver: Optimal batchstørrelse [klikk](#)
13. Kortstokk: Gjette hva som kommer opp [klikk](#)
14. Random walk i sirkel [klikk](#)
15. Hogge trepinner 1 [klikk](#)
16. Hogge trepinner 2 [klikk](#)
17. Uniform $[0,1]$ trekninger der høyeste tall vinner: Optimal strategi [klikk](#)
18. Lage tre terninger der A slår B, B slår C og C slår A [klikk](#)
19. Varians til kvadratrot av sum [klikk](#)
20. Dreidel: Et klassisk pengespill [klikk](#)
21. Entydig bestemmelse av fordeling ut fra momentsekvens? [klikk](#)
22. Brusautomater med «gevinst» [klikk](#)
23. Korrelasjon mellom gjennomsnitt og median. [klikk](#)
24. Krysse en by med trafikklys: Forventet antall stopp. [klikk](#)
25. Banachs fyrstikkproblem [klikk](#)
26. Skyte mot blink: Korreksjonsstrategier [klikk](#)
27. Triell: Sjansen for overlevelse [klikk](#)
28. Romfartøyer på planet: Kontaktsannsynlighet [klikk](#)
29. Forsamling: Ventetid til alle har satt seg [klikk](#)
30. To barnsfamilie: Sjanse for gutt født på tirsdag [klikk](#)
31. Fotball: Sjanser for seedet vinner [klikk](#)
32. Sirkelproblem: Punkts potens [klikk](#)
33. Garderobeskapspusleri [klikk](#)
34. Myntsamling: Sjansen for komplettering [klikk](#)
35. Uniform fordeling i og på sirkel [klikk](#)
36. Revy – sannsynlighet for siste inn får sitt eget sete [klikk](#)
37. Gjette ukjent farge: Strategi [klikk](#)
38. Eggslipp fra etasje: Forsøksstrategi [klikk](#)
39. Bilkolonner: Forventet antall ankomstgrupper [klikk](#)
40. Togkrysning: Kollisjonssannsynlighet [klikk](#)
41. Simulere rettfærdig med skjev terning [klikk](#)
42. Heis: Den første opp eller ned? [klikk](#)
43. Utslagsturnering: Tippe utfall [klikk](#)
44. Pentagon i sikte: Hvor er jeg? [klikk](#)

Pusleri nr. 1

Anta at du er alene i en fremmed by på skuddårsdagen. En kino annonserer at alle skuddårsbarn kommer gratis inn, de andre må stille seg i kø. Den første person i køen som kommer frem til luken, og som har samme fødselsdag som en som allerede har kjøpt billett, kommer også gratis inn. Anta at du vokter køen og slutter deg til denne når du tror at du har størst sjanse for å komme inn gratis. Hvilken plass i køen velger du?

[Løsning](#) [Innholdsliste](#)

[Innholdsliste](#)

Pusleri nr. 2

En viss type amøbe har egenskapen at hvert minutt vil den enten dø, forbli som den er, dele seg i to eller dele seg i tre. Anta at de fire mulighetene er like sannsynlige. En slik amøbe puttes i en krukke. Hva er, med rimelige tilleggsantakelser, sannsynligheten for at amøbe(kolonien) i krukken dør ut?

[Løsning](#) [Innholdsliste](#)

Pusleri nr. 3

Jeg ankommer bussholdeplassen nokså tilfeldig hver morgen, og registrerer hvor mange busser som går i motsatt retning før første buss i min retning kommer. Over en periode på 2 uker var det:

2 1 1 0 0 2 3 1 2 0

I gjennomsnitt noe over 1. Det var mystisk! Det må jo være sannsynlighet $\frac{1}{2}$ for at min buss kommer først og $\frac{1}{2}$ for at en buss i motsatt retning kommer først. Burde ikke da gjennomsnittlig antall busser i motsatt retning før min buss kommer være ca. $\frac{1}{2}$?

Problemstillingen kan belyses på ulike måter, fra den enkle og intuitive til den matematisk sofistikerte under ulike antakelser.

Pusleri nr. 4

Auksjoner kan foregå på flere måter, bl.a.

- (1) Bud høynes inntil ingen flere bud kommer. Siste budgiver betaler budt beløp ("First prize - open cry", kalt engelsk auksjon)
- (2) Alle budgivere byr i lukket konvolutt. Høyeste budgiver vinner og betaler budt beløp ("Sealed bid - first prize")
- (3) Auksjonarius setter pris over høyest tenkelige og senker priser inntil første budgiver slår til (kalt hollandsk auksjon).
- (4) Som (2), men høyeste budgiver betaler nest høyeste bud. ("Sealed bid - second prize").

Det er nokså lett å innse at (2) og (3) er ekvivalente.

Vis (under rimelige forutsetninger) at (1) og (4) er ekvivalente.

Aha! I valget mellom de to vanlige auksjonstypene (1) og (2), må derfor (2) være bedre for selger enn (1), fordi (2) gir det høyeste lukkede bud, mens (1) gir beløp ekvivalent med nest høyeste lukkede bud. Sant eller galt?

Hint: Hvis du ikke greier å avgjøre generelt det siste spørsmålet, som ga William Vickrey nobelprisen i økonomi, kan du som få lov til å tenke deg n personer som vurderer auksjonsobjektet iht. uavhengige trekninger fra den rektangulære fordeling $[0,1]$.

Pusleri nr. 5

Her er tre myntkastproblemer:

1. Hvordan kan du generere 50:50 sjanse med myntkast med en skjev mynt?
2. Hva er sannsynligheten for at KK forekommer i n rettferdige myntkast?
3. *Hva er sannsynligheten for at KMK forekommer i n rettferdige myntkast?

[Innholdsliste](#)

Pusleri nr 6

Hva er sannsynligheten for at forholdet mellom to uavhengige $R[0, 1]$ variable har et ett-tall som første gjeldende siffer? Hva blir sannsynlighetsfordelingen til første gjeldende siffer?

Er du innesnødd i påsken kan du gjerne løse den tilsvarende oppgaven med produkt, sum, differens,

[Løsning](#) [Innholdsliste](#)

Pusleri nr 7

Et spill består av gjentatte terningkast med gevinst sum øyne, men dersom du får en ener, er spillet slutt og du har tapt alt.

Hva er den optimale strategi for å maksimere forventet gevinst og hva blir den forventede gevinst når denne følges? Hva blir sannsynlighetsfordelingen til gevinsten?

Finner du det siste spørsmålet for vanskelig eller for tidkrevende, kan skriv en makro som simulerer trekninger fra fordelingen. Hvem klarer å skrive makroen (f.eks. i Minitab) med færrest antall programlinjer?

Pusleri nr 8

"Eg har 24 sokkar, ikkje to av dei er par!"

synger Belbert i visa "Sokkane" i "popgruppa" Salhusvinskvetten.

Problemstillingen kan presiseres på minst to måter:

- (1) Belbert har n par sokker, men har somlet bort de fleste, har bare 24 igjen, og ingen av disse er par.
- (2) Belbert har 12 par sokker og har parret dem i ørska, men de passer ikke sammen.

Finn sannsynligheten ved begge presiseringer under rimelige antakelser. Hvor mange sokker måtte Belbert ha for at sjansen i (1) skal bli mer enn 50%?

Merk at (2) ikke er det samme som det mer velkjente matching-problemet, ofte benevnt som "hatteproblemet".

Pusleri nr 9

Du tilbys et spill med gjentatte terningkast, der gevinsten i hvert spill er antall øyne på terningen. På forhånd er terningen fikset ved at den trilles, og oppsiden overmales, slik at siden nå viser "0 øyne". Du får ikke vite på forhånd hvilken side som er overmalt, og heller ikke se terningen under spillets forløp, men får kun vite utfallet av hvert nytt terningkast.

Anta at innsats i hvert spill er 3 kr, og du kan velge å stoppe eller fortsette så lenge du vil.

- a. Hvilken strategi vil du velge, og hva er forventet gevinst ved å spille denne strategien?
- b. Hvilken innsats vil gjøre spillet til et rettferdig spill, under forutsetning **av** optimalt spill?

Pusleri nr 10

Hva er sannsynligheten for å oppnå YATZY ?

Med andre ord kast med 5 terninger, der målet er å oppnå samme antall øyne på de 5 terningene, men der en etter første kast har anledning til inntil to nye kast med det utvalg av terninger som ikke passer. Vi forutsetter at optimal strategi ved utvalget av terninger til nytt kast benyttes.

Finn gjerne en løsning egnet for numerisk beregning, for eksempel i Minitab.

Ekstraspørsmål:

Hvor mange ekstrakast må tillates for at sannsynligheten skal bli $> \frac{1}{2}$?

Hva er forventet antall kast som er nødvendig for å få YATZY?

Pusleri nr. 11

En komite med $2n+1$ personer skal treffe en viktig beslutning ved flertallsvedtak. Anta at de $2n$ første stemmer uavhengig av hverandre og hver har sannsynlighet p for å treffe den (for deg) "riktige" beslutning. Den siste (som sovnet under møtet) kan enten være som de andre eller velge å stemme identisk med sidemannen. Vil da sjansen for "riktig" beslutning være uendret, økt eller redusert?

[Løsning](#) [Innholdsliste](#)

Pusleri nr. 12

Et laboratorium skal analysere vannprøver fra n ulike kilder for forurensning. For å redusere antall analyser som må foretas, tilrettelegges samleprøver ("batcher") bestående av et uttak av vann fra k ulike prøver som blandes. Anta at k er divisor i n , eksempelvis dersom det er $n=12$ kilder, kan en lage 3 samleprøver med "blande vann" fra 4 kilder. Først analyseres hver samleprøve, og bare hvis en slik er forurenset analyseres vann fra hver av kildene til denne samleprøven.

Hva er den optimale batch-størrelsen k , og hvordan avhenger den av n ? Hvor mye analysearbeid kan spares? Når er $k=1$ optimalt, dvs. analysere hver av de n vannprøvene for seg.

[Løsning](#) [Innholdsliste](#)

Pusleri nr. 13

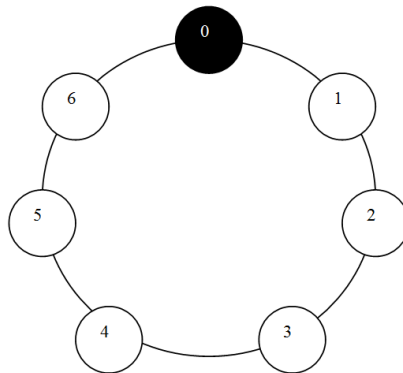
Ta for deg en vanlig godt stokket kortstokk med 52 kort, 26 røde og 26 sorte. Kortene blas opp ett etter ett, fra første kort til siste kort. Før hvert nytt kort vises, skal du gjette fargen på dette. Hva er forventet antall korrekte gjetninger?

[Løsning Innholdsliste](#)

Pusleri nr. 14

En Canadagås og n brunsniler er plassert rundt en sirkel, i figuren illustrert med $n=6$ og gåsen i posisjon 0 og en snile i hver av posisjonene 1 til n . Gåsen gjør en "random walk" langs sirkelen, hvert steg til en av de to nærmeste posisjonene og spiser snilen som er der, hvis der er noen.

Hva er sannsynligheten for å bli lengstlevende snile i hver av posisjonene?
Hva er forventet levetid for hver av snilene?



En alternativ kontekst for problemet er:

Det sitter n personer ved et sirkelrundt bord og en ølmugge (0) som rommer en slurk til hver passerer iht. en "random walk". Har du allerede fått din slurk, skåler du bare og sender kruset fra deg. Hvor bør du unngå å sitte hvis du er veldig tørst? **Varianter av denne kontekst er også interessante, for eksempel at ølmuggen rommer m slurker eller er en Sareptas-ølmugge. Spørsmålene er mange.**

[Løsning](#) [Innholdsliste](#)

Pusleri nr. 15

En trepinne med lengde 1 meter skal deles i tre med to øksehugg. Anta uavhengige hugg, som hver treffer iht. en uniform fordeling over intervallet $[0,1]$. Hva er sannsynligheten for at

- a) ingen bit har lengde over 0.5m?
- b) den midterste biten er størst?

Pusleri nr. 16

Nytt pinnepusleri: En trekvist med lengde 1 meter skal deles i tre med to økehugg. Anta at første hugg treffer iht. en uniform fordeling over pinnens lengde, og at en så griper den lengste pinnen som deles på tilsvarende måte. Hva er forventet lengde på den lengste av de tre pinnene en da sitter igjen med?

[Løsning](#) [Innholdsliste](#)

Pusleri nr. 17

Et spill mellom to personer er basert på uavhengige trekninger $\text{Uniform}[0,1]$, der det gjelder å få det største tallet. Spiller nr.1 trekker sitt første tall, men kan velge om han vil forkaste det og trekke på nytt. I så fall må det nye tallet beholdes. Spiller nr. 2 gjør akkurat det samme, med den forskjell at hun ser hvorvidt spiller nr.1 velger å trekke på nytt eller ikke. Spørsmålet er:

Hva er optimal strategi for hver av de to spillerne?

Man kan tenke seg to situasjoner, der versjon 2 trolig er en langt større utfordring enn 1 :

1. Spiller nr. 1 vet ikke at spiller nr.2 "titter".
2. Spiller nr. 1 vet at spiller nr.2 "titter" (og spiller nr.2 vet at nr.1 vet...).

Pusleri nr. 18

Vi skal lage tre terninger A, B, C med vanlig seks-sidig form, der tallene på sidene er valgt blant tallene fra 1 til 9. Forsøk, om mulig, å lage terningene slik at en ved kast med to av dem har at de tre begivenhetene "A slår B", "B slår C" "C slår A" alle har sannsynlighet større enn $\frac{1}{2}$. En bør også kunne argumentere for at en eventuell funnet løsning er den eneste mulige.

[Løsning](#) [Innholdsliste](#)

Pusleri nr. 19

Etter mange puslerier om sannsynligheter kommer et statistisk, som sikkert kan belyses ut fra ulike synsvinkler:

La $X_1, X_2, \dots, X_n$ være uavhengige variable med samme forventning og samme endelige varians. Variansen til summen S_n vokser da lineært med n mot uendelig.

Spørsmål: Er det slik at variansen til kvadratroten av summen vokser med kvadratroten av n mot uendelig? Hvis ikke, hva skjer? Hva med variansen til kubikkroten av summen?

Løsning [Innholdsliste](#)

Pusleri nr. 20

Dreidel er et gammelt spill med jødisk opprinnelse, der en bruker en firesidig terning (tetraeder) med sider markert med N, G, H og S. Spillet tillater et vilkårlig antall spillere p , og starter med at alle legger en pengeenhet i potten. Så kastes dreidelen av spillerne etter tur. Resultatet for spiller ved de ulike utfall er N="Nun"=ingen gevinst, G="Gimel"= Hele potten, H="Hay"=Halve potten, S="Shin"=Legg en pengeenhet i potten. Hver gang potten tømmes bidrar alle spillere med en pengeenhet, og spillet fortsetter.

Hva er forventet utbetaling for spilleren i n 'te spilleomgang?

Hva er forventet utbetaling til første spiller som tømmer potten?

*Hva er forventet nettogevinst for hver spiller for en spillerunde, dvs. inntil potten tømmes?

Kommentar: Spillet foregår typisk ved at hver spiller har et gitt beløp, for eksempel 20 pengeenheter, og varer inntil en spiller sitter igjen med alt. Dette gir opphav til ytterligere og mer utfordrende problemer.

Løsning [Innholdsliste](#)

Pusleri nr. 21

Gitt at $EX^n = \frac{1}{n+1}$ $n=1,2,3,\dots$. Vis at den uniforme fordeling over $[0,1]$ er den eneste fordeling med denne sekvens av momenter.

Kommentar: Problemet har en interessant forhistorie knyttet til a posteriori beregningen av binomisk p for uniform prior. Thomas Bayes (1702-1761) var blant de første til å diskutere dette, og viste flere resultater uten dagens begreper og metoder. På hans tid ble parametere betraktet som diskrete størrelser. Bevis måtte skje uten integraler og differensialresonnementer, slik vi kjenner det, og man gikk ikke ut over endelig additivitet. Beviser måtte derfor ofte ta (unødige) omveier. I ettertid har man funnet ut at Bayes bevis av a posteriori problemet hadde et hull, som kunne fylles med referanse til ovenstående resultat.

Pusleri nr. 22

En ny type brusautomater tar bare 10-kroners mynter, og gir ikke tilbake vekslepenger. Dersom en flaske brus koster mindre enn 10 kroner, kommer en brus, samt mynten i retur med en viss sannsynlighet. Denne er slik at forventet beløp til automateier pr. myntinnkast blir korrekt. Per og Pål er svært tørste. Den billigste brusen koster 8 kroner, men de har bare en 10 kronemynt "på fellesen".

Hva er sannsynligheten for at de får (minst) hver sin brus?
Hva er forventet antall brus de kan få ut av 10-kronen?

En annen brusautomat tar også bare 10-kroners mynter, og gir ingen mynt i retur, men gir isteden en ekstra brus med en viss sannsynlighet. Denne er slik at forventet verdi av utlevert brus pr. myntinnkast blir korrekt.

Hva er sannsynligheten for at de får hver sin brus?
Hva er forventet antall brus de får ut av 10-kronen?
Hvilken av de to brusautomatene vil Per og Pål foretrekke?

Per og Pål lurte på om forventet kostnad pr. mottatt brus er lik 8 kroner, slik det bør være sett fra kundens side. Avgjør om så er tilfelle. Hvis ikke, hva er retursannsynlighetene som gir rettferdighet for hver av automatene?
Endrer dette noe på hvilken automat som bør foretrekkes?
Hva mener du om spørsmålet om hva som er rettferdig?

Pusleri nr. 23

For n uavhengige standardnormalfordelte variable, hva blir (evt. tilnærmet) korrelasjonen mellom gjennomsnittet $\bar{X}_n$ og medianen M_n ?

Hva kan sies om dette dersom vi fjerner antakelsen om normalitet?

[Løsning](#) [Innholdsliste](#)

Pusleri nr. 24

Du bor i en by med kvadratisk gatestruktur, og vil besøke Per som bor m kvartaler øst og n kvartaler nord for deg. Alle gangfelt er lysregulert med vekslende grønt og rødt lys, og møter du et rødt lys i gangretningen, som er øst evt. nord, skifter du gangretning uten stopp til nord evt. øst, krysser gaten, og fortsetter i samme retning etter samme prinsipp, så lenge en slik mulighet fortsatt finnes. Anta at trafikklysene er usynkroniserte, og at rødt eller grønt i gangretningen er like sannsynlig. Hva er forventet antall nødvendige stopp for rødt lys inntil du er framme hos Per? Angi spesielt tilfellet $m=n$.

[Løsning](#) [Innholdsliste](#)

Pusleri nr. 25

Du har to fyrstikkesker med n fyrstikker i hver eske. Hver gang du trenger en fyrstikk velger du en av eskene tilfeldig, og bruker en fyrstikk fra denne. Slik fortsetter du, uten å holde rede på hvor mange fyrstikker du har brukt, inntil den eske du åpner er tom. Hva er forventet antall fyrstikker i den andre esken?

[Løsning](#) [Innholdsliste](#)

Pusleri nr. 26

Tenk deg at du skyter mot blink, og at du etter hvert skudd vurderer avviket mellom treffpunkt og senterpunkt, med sikte på eventuell korrigering av siktet.

Betrakt hver av de fire strategiene:

1. Skyt som før uansett siste avvik.
2. Korriger vekk fra nåværende innstilling iht siste avvik.
3. Korriger vekk fra opprinnelig innstilling iht siste avvik.
4. Rett siktet mot siste treffpunkt uansett hvor det er.

Hva kan sies om disse strategiene mht. risiko for avvik fra blinken?

Har du analogier fra andre felt eller dagliglivet for noen av disse strategiene?

Pusleri nr. 27

A, B og C skal gjøre opp sitt mellomværende ved en trekantduell som foregår slik: Deltakerne står hvert sitt hjørne av en likesidet trekant. Hver deltaker skyter etter tur, et skudd om gangen, startperson og rekkefølge avgjøres ved loddtrekning. Dette fortsetter i samme sykliske rekkefølge inntil en av deltakerne står alene tilbake som den overlevende. Det står hver deltaker fritt til å sikte og skyte på hvem han vil. Alle tre deltakere vet at A alltid treffer det mål han sikter på, B treffer med sannsynlighet 0.80 og C treffer med sannsynlighet 0.50. Anta at alle tre deltakere velger sin beste strategi.

Hvem har størst sjanse for å overleve?

Hva er sannsynlighetene for at henholdsvis A, B og C overlever?

Pusleri nr. 28

Planeten X er en kule med senter i O. Tre romfartøyer A, B og C har landet på overflaten, tilfeldig og uavhengig av hverandre. De to fartøyer {A,B} kan kommunisere med hverandre direkte, hvis og bare hvis $\angle AOB$ er mindre enn 90° . og tilsvarende for {B, C} og {A, C}. Finn sannsynligheten for at alle kan få kontakt med hverandre, dvs. enten direkte eller via det øvrige romfartøyet.

[Løsning](#) [Innholdsliste](#)

Pusleri nr. 29

I en forsamling på n personer blir alle bedt om å reise seg, finne fram en mynt, knipse den. Dersom den viser kron, får en sette seg. Dette gjentas runde etter runde, til alle har satt seg.

La X være antall runder som trengs. Hva er sannsynlighetsfordelingen til X og EX ?

Beregn EX dersom det dreier seg om (i) $n=10$ i festlig lag (ii) $n=100$ personer på en forelesning (iii) $n=10\,000$ på Brann stadion (iv) $n=100\,000$ på Camp Nou (FC Barcelona).

* Hva kan sies dersom n går mot uendelig?

[Løsning](#) [Innholdsliste](#)

Pusleri nr. 30

"I en to-barnsfamilie er det minst en gutt. Hva er sannsynligheten for at begge er gutter?"

De fleste er nok allerede kjent med dette problemet, og vet at svaret er:

"Det kommer an på!" Dersom konteksten er tilbakeholding av informasjon blir svaret $1/3$, mens dersom den første vi møter er gutt, blir svaret $1/2$. Begge under standard uniformitetsantakelser. Nylig har det dukket opp en variant av denne:

"Jeg har to barn, og en er gutt født på tirsdag. Hva er sannsynligheten for at begge er gutter?"

En første reaksjon er at: "Tirsdag eller ikke kan da ikke ha noe å si!"

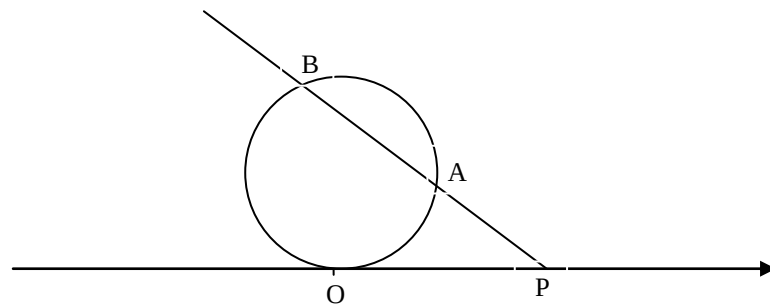
Et svar er: "Det har alt å si!" Enig eller uenig?

Pusleri nr. 31

I en fotballturnering deltar åtte lag, fire av disse er seedet foran de andre fire. Det spilles cup, og første runde (kvartfinalen) er oppsatt slik at hvert seedet lag møter et useedet. Anta at sannsynligheten for at et seedet lag slår et useedet er $p > 1/2$, og at i kamper mellom likt seedede lag har begge sannsynlighet $1/2$ for å vinne.

Hva er sannsynligheten for at

- (a) Et gitt seedet lag når finalen
- (b) Et gitt useedet lag når finalen
- (c) Et useedet lag når finalen
- (d) Et gitt seedet lag vinner
- (e) Et gitt useedet lag vinner

Pusleri nr. 32

Tegn en linje og en sirkel som berører linjen i punktet O. Avsett fra punktet O en lengde X langs linjen trukket fra normalfordelingen $N(0,1)$. Endepunktet i positiv eller negativ retning kaller vi P. Fra punktet P trekker vi en tilfeldig rett linje, som i figuren krysser sirkelen i punktene A og B.

Hva er sannsynlighetsfordelingen til produktet av avstandene PA og PB, gitt at linjen krysser sirkelen?

[Løsning](#) [Innholdsliste](#)

Pusleri nr. 33

Arne er håndballtrener og en dag etter treningen samler han de 10 frammøtte rundt seg i gymsalen, og sier: "I garderoben er det akkurat 10 nummererte garderobeskap. Jeg har et foto av hver av dere og har plassert et bilde i hvert av skapene helt tilfeldig. Dere får slippe inn i garderoben en etter en, og får lov til å åpne halvparten av skapene, dvs. 5 skap hver, med sikte på å finne eget bilde. Om du lykkes eller ikke, legger du alt tilbake på plass, lukker skapene, slik at nestemann som kommer møter akkurat samme oppgave. Deretter forlater du garderoben ut døren til gangen, og går hjem, uten å kommunisere med de andre på laget. Dersom **alle 10** på laget har funnet eget bilde, blir det gratis treningsleir for alle. Jeg vil være tilstede i garderoben for å observere utfallet, og se til at alt går riktig for seg. Dere får en halv time til å diskutere oppdraget før vi setter i gang. Jeg går ut i garderoben imens. Forstått!"

Etter at laget er overlatt til seg selv, tar Bønna ordet først: "Hva er det å diskutere? Hver av oss har 50% sjansje for å finne vårt eget bilde, uavhengig av hva de andre gjør. Sjansen for at vi greier det alle sammen er da en halv opphøyd i tiende (som er mindre en promille), og slik er det samme hvilke skap de andre velger å åpne, så lenge vi ikke får gitt noe informasjon til de som kommer etter". Calle bryter inn: "Jeg er uenig. Enn om de 5 første av oss velger de 5 skap med lavest numre, og de 5 siste av oss velger skapene med de høyeste numre? Da tror jeg vil sjansen for å lykkes vil øke". Dølle har stått og grublet, og sier så: "Calle har rett, men hans løsning gir oss heller ikke særlig stor sjansje. Jeg mener det er mulig å velge en strategi som kan gi oss langt større sjansje for å komme på treningsleiren. Hør nå her...". Bønna bryter han av: "For noe tull. Dette er bortkasta tid å diskutere. La oss få det overstått, og komme oss ut herfra!".

Dølle klarer imidlertid å overbevise de andre med intuitive argumenter, og laget gikk med på hans strategi. Det viste seg at laget lyktes i sitt oppdrag, og kom på treningsleiren. Innen den tid hadde Dølle regnet ut sannsynligheten for at den strategien han foreslo skulle lykkes. Den var over 30%!

Greier du å gjøre han det etter?

Pusleri nr. 34

I USA gjennomførte man i perioden 1999-2008 The 50 States Quarters Program. Kort fortalt ble store mengder quartermynter sendt ut på markedet med motiver fra hver av de 50 ulike statene. Per hadde forskningsopphold i USA på denne tiden, og skrev bl.a. følgende i sin rapport hjem:

"Min datter Jenny prøver å få en fullstendig States Quarters samling, og hun har 47 ulike nå. Når vi får en slik quarter ser vi først etter om den passer i hennes samling, hvis ikke så legger jeg den til min egen samling, som har 34 forskjellige akkurat nå. Før vi begynte å samle spurte jeg meg selv:

Hva er forventet antall slike mynter som trengs før Jenny har en fullstendig samling?

Hva er forventet antall slike mynter som trengs før jeg også har en fullstendig samling?

I det siste har det gått lenge mellom hver gang vi finner en ny mynt, og jeg spør meg:

Hva er forventet antall flere mynter som trengs for Jenny og meg akkurat nå, når Jenny har 47 ulike mynter og jeg 34?

Per reiste også andre spørsmål, som trolig er mer krevende, bl.a. knyttet til forventet antall av den myntsort det er flest av i sparebøssen der alle mynter havnet som ingen av dem hadde bruk for, og spørsmål knyttet til situasjoner der han og datteren sluttet å samarbeide, f.eks. angående sjansen for at han fikk samlingen komplett før datteren.

Merknad. I virkeligheten var opplaget av de ulike myntene ikke det samme, og myntene ble introdusert til forskjellig tid. Samtidig var det fortsatt mange mynter av den gamle type. Se

http://en.wikipedia.org/wiki/50_State_Quarters.

Pusleri nr. 35

La Y_1 og Y_2 være uavhengige Normale(0,1) og la

$$Y_1 = \frac{X_1}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}} \quad \text{og} \quad Y_2 = \frac{X_2}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}}$$

Da er opplagt (Y_1, Y_2) uniformt fordelt på sirkelen $Y_1^2 + Y_2^2 = 1$. La isteden

$$Y_1 = \frac{X_1}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + Z}} \quad \text{og} \quad Y_2 = \frac{X_2}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + Z}}$$

der Z er ikke-negativ stokastisk variabel, slik at (Y_1, Y_2) er punkt på sirkelskiven $Y_1^2 + Y_2^2 \leq 1$. Hvilken sannsynlighetsfordeling må Z ha for at (Y_1, Y_2) blir uniformt fordelt på sirkelskiven?

Hint: Med Arkimedes på laget trenger du ikke papir og blyant.

[Løsning](#) [Innholdsliste](#)

Pusleri nr. 36

Ved et revyteater er alle billettene til kveldens forestilling utsolgt, og hver publikummer har billett som motsvarer en nummerert plass. På galleriet er det bare en inngangsdør, og publikum der står i kø og venter på at den skal åpnes. Den første i køen er imidlertid beruset og setter seg på en tilfeldig plass, som bare samsvarer med billetten hvis han har flaks. Så kommer de andre inn, en etter en, og setter seg på tildelt plass dersom denne er ledig. Hvis den ikke er ledig, ønsker den enkelte publikumer ikke å lage noe oppstyr, og velger en plass tilfeldig blant de som fortsatt er ledige. Dette fortsetter inntil alle har satt seg.

Hva er sannsynligheten for at den siste i køen får plass i henhold til sin billett?

Hint: Det er ikke nødvendig med papir og blyant!

Pusleri nr. 37

Ole, Dole og Doffen har julejobb i en sportsbutikk, der de selger sykkelhjelmer av to farger blå og grønn. Butikksjefen Guffen sier at alle skal få hver sin hjelm dersom de greier følgende fellesoppgave:

«Vi går inn i pauserommet med mange hjelmer av hver farge i en kasse. Jeg slukker lyset og plukker tilfeldig tre hjelmer fra kassen og setter en på hodet til hver av dere og lukker kassen. Jeg slår på lyset og dere ser hvilken farge det er på hjelmen til de to andre, men ikke egen farge. Dere skal så gjette hvilken farge det er på egen hjelm, og resultatet avgjør om alle skal få hjelm eller ingen av dere skal få hjelm. Dere får alle den hjelmen dere har på hodet hvis minst en av dere gjetter riktig, mens dersom minst en av dere gjetter feil, får ingen av dere hjelm. Dere kan imidlertid melde pass for å unngå å være den som spolerer det hele. Dere skriver hver deres gjetning (B eller G) eventuelt pass (P) på hver deres lapp uten ytterligere kommunikasjon med hverandre. Før vi går i gang har dere lov til å diskutere en felles strategi som kan øke sjansen for at dere lykkes».

Ole: «Sjansen for å lykkes er mindre enn 50% og det er feigt å si pass!»

Dole: «Nei, med pass har vi i hvert fall en strategi som gir oss akkurat 50% sjanse, men mer er det ikke mulig å oppnå!»

Doffen: «Jeg tror vi kan oppnå langt større sjanse, hør nå her.....»

Kan du hjelpe Doffen med å finne en slik strategi?

Ekstra utfordring: Hva tror du skjer dersom det er flere enn tre med?

[Løsning](#) [Innholdsliste](#)

Pusleri nr. 38

Knoll og Tott er på besøk hos Tuppen som er flyttet til byen for å studere. Hun bor øverst i en blokk med 10 boligetasjer over grunnplanet (0'te etasje). Knoll og Tott har med seg hvert sitt svært robust strutseeegg, og lurert på hvor høyt i etasjene de kan gå, slippe et egg ut vinduet, uten at det knuses når det treffer bakken. De har funnet ut at det er et vindu i hver etasje som lar seg åpne, og vil derfor gjøre et eksperiment med å slippe egg fra utvalgte høyder. Tuppen går motvillig med på dette, men tillater kun fire slipp i alt. Hva er den høyeste etasjeslipp det er mulig å fastslå med full sikkerhet at et slikt egg tåler/ikke tåler, og hvilken forsøksplan sikrer dette?

[Løsning](#) [Innholdsliste](#)

Pusleri nr. 39

To byer A og B ligger svært langt fra hverandre er forbundet med en smal vei som umuliggjør forbikjøring. Vi sender avgårde n biler fra A, der hver er pålagt å kjøre med konstant fart. Farten til de enkelte bilene velges tilfeldig og uavhengig av hverandre fra en gitt sannsynlighetsfordeling $f(v)$. Hver gang en bil innhenter saktekjørende bil(er) må den regulere farten ned til de innhentede bilers fart. Hva er forventet antall "grupper" av en eller flere biler som ankommer B?

Hint: Spiller sannsynlighetsfordelingen noen rolle?

[Løsning](#) [Innholdsliste](#)

Pusleri nr. 40

To dobbeltsporede toglinjer, linje 1 (Syd/Nord) og linje 2 (Øst/Vest), krysser hverandre. Anta at alle tog "braser" gjennom krysset uten å ta omsyn til eventuelle varsler om kryssende tog. Vi ønsker å belyse kollisjonsrisikoen under følgende forutsetninger: Togsett på de to linjene har ulik lengde a_i ($i=1,2$), og ankommer krysset iht. en Poissonprosess med ulik rate λ_i ($i=1,2$), dvs. at ventetiden mellom hvert tog på hver av linjene er eksponensielt fordelt. Farten forut for krysningen antar vi er den samme v på begge linjene.

(a) Du har tatt et tilfeldig tog på linje 1.

Hva er sannsynligheten for kollisjon med kryssende tog?

(b) Hva er totalt forventet antall kollisjoner pr. tidsenhet?

Klargjør den rolle eventuell ulik fart på de to linjene forut for krysningen har.

Ikke bry deg om eventuelle komplikasjoner ved veldig lange tog, og eventuell rydding av linjen etter et krasj!

Pusleri nr. 41

Du skal simulere utfallet av et rettferdig terningkast, men til hjelp har du bare en sekssidet terning som ser skjev og rar ut. Greier du det likevel når du får lov til å trille den skjeve terningen flere ganger? Hint: $6=3!$

[Løsning](#) [Innholdsliste](#)

Pusleri nr. 42

Hansen arbeider i nest øverste etasje i en bygning med seks etasjer over 0'te etasje. Den eneste heisen går kontinuerlig mellom etasjene 0,1,2,...,5,6,5,2,1,0,1,2...., og tar med folk der noen venter på heisen. Når han skal ta heisen ned og ut for å ta seg en røyk, så blir han ofte irritert over at heisen som oftest fortsetter opp. Han skjønner nok hvorfor, men spør seg hva sannsynligheten er, for at når heisen kommer, så går den ned. Han lurar også på hvordan situasjonen hadde vært med to parallelle heiser. Hva er da sannsynligheten for at den første heisen som kommer går ned? Han tror det må være det samme, men er ikke sikker.

Problemstillingen kan belyses ut fra ulike antakelser. Anta her heiser med samme fart og uavhengighet/ tilfeldig start, og at tiden det tar å tømme og fylle heisene er neglisjerbar i forhold til transporttiden. Det siste er selvsagt urealistisk, men tenk da på en såkalt paternosterheiser med kun en bås, der en hopper på og av i fart.

Pusleri nr. 43

En utslagsturnering har 32 lag, som gir til sammen $16+8+4+2+1=31$ kamper over 5 runder inntil vinneren er kåret. Du skal før turneringen stater tippe utfallet av alle kampene i turneringen, og skårer poeng som følger: 16 poeng for riktig vinner, 8 poeng for hver riktig semifinalvinner, 4 poeng for hver riktig kvartfinalevinner, 2 poeng for hver annenrunde vinner og 1 poeng for hver riktig førsterunde vinner. Det er altså mulig å skåre maksimalt $16+ 2 \times 8+4 \times 4+ 8 \times 2+16 \times 1=5 \times 16=90$ poeng. Anta at kampoppsettet foreligger i form av et tre, men at du ikke vet noe om lagene og tipper utfallet hver kamp langs grenene til roten (vinneren). Hva er forventet antall samlede poeng?

[Løsning](#) [Innholdsliste](#)

Pusleri nr. 44

En bygning har omriss som en likesidet femkant, lik Pentagon i Washington, der sidelengden er 314m. Anta at den er plassert på en uendelig slette og kan sees derfra, uhindret av andre bygninger. Per vandrer tilfeldig rundt på sletten, og du får telefon fra han: «Akkurat nå ser jeg minst to sider av bygningen, men om det er to eller tre er vanskelig å si».

Hva er tilnærmet sannsynligheten for at han ser tre sider av bygningen?

Bonusspørsmål: Kort etter ringer Per opp igjen og sier: «Washington her! Jeg var blendet av morgensolen, men ser nå tre sider av bygningen. Oops!, der forsvant to av dem!».

Kan du ut fra dette si presist hvor han befinner seg?

Løsninger

[Innholdsliste](#)

[Pusleri nr. 1 \(løsning\)](#)

Problemstilling: Når bør en skulle slutte seg til en kø for å være den første som har fødselsdag på samme dag til en eller annen foran i køen. La

p_k = person nr. k i køen har samme fødselsdag som en foran

q_k = de k første i køen har ulik fødselsdag

Da er (sett $p_1 = 0$ og $q_0 = q_1 = 1$)

$$p_{k+1} = q_k - q_{k+1} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Vi må finne den største k slik at $p_k > p_{k+1}$, eller ekvivalent, første k slik at $p_{k+1} < p_k$.

Nå er (her er $d = 365$)

$$q_{k+1} = q_k \frac{d-k}{d} = q_k - \frac{k}{d} q_k$$

slik at

$$p_{k+1} = \frac{k}{d} q_k = \frac{k}{d-k} q_{k+1}$$

Følgelig er

$$p_{k+1} - p_k = \frac{k}{d} q_k - \frac{k-1}{d-(k-1)} q_k = \frac{d+k-k^2}{d(d-k+1)} q_k$$

Ligningen

$$f(x) = d + x - x^2 = 0$$

har positiv løsning

$$x = 0.5 + \sqrt{d + 0.25} = 19.611$$

Den første heltallige k som gir $f(k) < 0$ blir derfor $k = 20$

Numerisk beregning ved rekursjonsformelen gir $p_{20} = 0.03232$.

Vi kan alternativt beregne q_k direkte ved kombinatoriske argumenter.

La $P(d, k)$ være antall permutasjoner av k elementer utvalgt fra d elementer. Da er

$$q_k = P(d, k) / d^k$$

Dette gir oss

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= q_k - q_{k+1} = P(d, k) / d^k - P(d, k+1) / d^{k+1} \\ &= (P(d, k) - P(d-1, k)) / d^k = k P(d, k) / d^{k+1} \end{aligned}$$

Vi har i siste overgang benyttet følgende kombinatoriske identitet:

$$P(d, k) = P(d-1, k) + k P(d-1, k-1)$$

Denne følger ved argumentet: Fikser en dato. Tell opp antall kombinasjoner der denne ikke er med, så alle kombinasjoner der den er med på en av k mulige plasser og $k-1$ datoer til velges ordnet blant de $d-1$ øvrige. Denne kombinatoriske fremgangsmåten ser ikke ut til å lede til like åpenbar bestemmelse av optimal k . Numerisk bestemmelse er selvsagt like enkelt ved begge metoder.

[Pusleri nr. 2](#) (løsning)

Vi skal finne sannsynligheten p for at en amøbe og dens etterkommere dør ut (uten bruk av teori for Branching Processes). Sannsynligheten for at en koloni med k amøber dør ut er, med uavhengighetsantakelse, lik p^k . Ved å betinge mhp. tilstanden etter et minutt får vi "likevektsligningen"

$$p = (p^0 + p^1 + p^2 + p^3)/4$$

Dette gir oss en tredjegradsligning, $p^3 + p^2 - 3p + 1 = 0$, som har to aktuelle røtter, $p = 1$ og $p = \sqrt{2} - 1$. Et mulig argument for å velge den siste roten er:

Anta at sannsynligheten for at en amøbe dør/forblir som før isteden er hhv. $1/4 - x$ og $1/4 + x$, der x kan være fra $-1/4$ til $1/4$. Den tilsvarende ligning har da løsning $p = 1$ og $p = \sqrt{2 - 4x} - 1$. Siden $x = 1/4$ må gi $p = 0$, er den første roten uaktuell.

[Pusleri nr. 3](#) (løsning med innspill fra Geir Arne Kjønstad og Trond Haider)

Geir Arne Kjønstad:

Intuitiv løsning: Det er klart at sannsynligheten for at det kommer **en** buss i motsatt retning før din kommer er 0,5, men det kan jo også komme flere busser i motsatt retning før den første kommer i din retning. Dermed blir gjennomsnittlig antall over 0,5 for antall som kommer i motsatt retning før første buss i din retning.

Matematisk løsning:

$P(\text{din buss er først}) = 0,5 \Leftrightarrow P(\text{null busser før din første}) = 0,5.$

$P(\text{en eller flere busser før din første}) = 0,5$

Gjennomsnittlig antall busser per dag før din første vil etter ei (lang) stund konvergere mot forventet antall,

$E(\text{antall busser før din første})$

$= (\text{null busser før din første}) * P(\text{null busser før din første})$

$+ (\text{en eller flere busser før din første}) * P(\text{en eller flere busser før din første})$

$= 0 * 0,5 + (\sum x P(X = x), \forall x \in \mathbf{N}) * 0,5$, der X er antall busser som kommer før din og $P(X=x) = 2^{-x}$

$= (1 * 2^{-1} + 2 * 2^{-2} + 3 * 2^{-3} + 4 * 2^{-4} + \dots) * 0,5 = 2 * 0,5 = 1$

Så ved å fortsette å registrere gjennomsnittlig antall busser før den første i din retning, vil du etter hvert nærme deg 1.

Trond Haider: Det finnes i alle fall tre forklaringer på det observerte misforhold, med vidt forskjellige bakgrunner:

Den ene forklaringen er parallell til forklaringen på følgende pusleri, dog med noe mer tilfeldig variasjon siden det dreier seg om buss:

" En mann hadde to elskerinne. Hver kveld dro han hjemmefra for å besøke en av dem. Han lot skjebnen, i dette tilfellet Oslo Sporveier, bestemme hvem av dem han skulle besøke, ved å ta den av de to T-banene som førte ham til sine elskerinne som kom først. Hver av disse T-banene gikk 4 ganger i timen. Likevel viste det seg at over en tid hadde han besøkt den ene av sine elskerinne 65% av kveldene, mens den andre bare ble besøkt i 35%. Denne mannen hadde dessverre ikke hatt hverken statistikk i videregående eller besøk av Ørnulf B. på ungdomsskolen, så han forsto ikke helt hvordan dette kunne skje."

Den andre forklaringen bunner rett og slett i at denne mannen drar på jobb på et tilfeldig tidspunkt i rushtiden i rushretningen. Bussen han skal ta blir mye oftere påvirket, og forsinket, enn de bussene som går andre veien. De vil ha en jevnere strøm fordi de kom seg forbi motsatte (mannens) holdeplass før rushtiden satte inn. Siden mannen går til holdeplassen nokså, men ikke helt, tilfeldig, vil det derfor være færre busser i ens retning enn i motsatt.

Den tredje forklaringen er simpelthen at det går to bussruter forbi hans stoppested, men at han bare kan ta én av dem.

Kommentar fra Lillestøl: Jeg takker for de to innsendte forklaringene. Jeg velger (muligens feilaktig) å oppfatte Trond dithen at han søker etter mulige årsaker til et observert misforhold. Hans refleksjoner er i så måte interessante, og kan brukes i pedagogisk sammenheng. Spørsmålet er imidlertid om det observerte er et misforhold.

Geir Arnes resonnement var i hovedsak det jeg hadde i tankene, men hans oppstilling gir anledning til kommentarer som kan ha pedagogisk interesse. I beregningen av $E(\text{antall busser før din første})$ er den første likheten ikke formelt riktig: (en eller flere busser før din første) er ikke en verdi (men flere) som ikke kan veies direkte med en sannsynlighet. Det er vel setningen om dobbelt-forventning det legges opp til, ved å betinge mhp om min buss kommer først eller ikke: $E(X) = E(X|B=0)P(B=0) + E(X|B>0)P(B>0)$. Denne setningen er svært intuitiv, men ikke kjent av alle med elementære kunnskaper i sannsynlighetsregning (som $2MX/3MX$ i videregående skole).

Man trenger den heller ikke, men kan gå rett på oppstillingen

$EX = 0(1/2) + 1(1/4) + 2(1/8) + 3(1/16) + \dots = 1$, og så argumentere for at $P(X=x) = 1/2^{x+1}$. I denne argumentasjonen vil betinget sannsynlighet og upåvirket gjenstående ventetid måtte inngå, dvs. formalisering av de upresise utsagn i oppgaven om at både bussene og jeg innfinner oss tilfeldig. Hvis vi tillater oss å bruke setningen om dobbeltforventning, er det en enklere oppstilling $EX = 0.5 \times 0 + 0.5 \times (1 + EX)$ som løst mhp EX gir 1, der vi har brukt et "fornyelsesargument" forankret i nevnt tilfeldigheter.

Jeg kan også forestille meg en mer generell løsning, der under visse forutsetninger $EX = (\mu^2 + \sigma^2)/2\mu^2$. Her vil spesialtilfellene at alle busser er i rute uten variasjon $\sigma = 0$ gi $EX = 1/2$ og ren tilfeldighet dvs. eksponensiell fordeling med $\sigma = \mu$ gi $EX = 1$. Et formelt bevis for dette kan skje ved fornyelsesteori og evt. ergodiske argumenter.

[Innholdsliste](#)

[Pusleri nr. 4 \(løsning\)](#)

La oss tenke oss bud på et hus, der hver budgiver har en bestemt oppfatning av hva huset er verdt. Ved hollandsk auksjon (3) lærer budgiverne ingen ting i budprosessen og kunne like gjerne ha skrevet ned budet på forhånd. Dette gir samme resultat som en lukket budrunde der høyeste bud vinner (2).

De to auksjonsformene (1) og (4) adskiller seg ved at engelsk auksjon (1) gir hver budgiver kunnskap om opponentenes bud og mulighet for å reagere på disse, noe som (2) ikke gir anledning til. Imidlertid vil det ved (1) for hver budgiver være optimalt å høyne budet (med så lite som mulig) så lenge den verdi vedkommende har satt på huset ikke er overskredet. Følgelig blir ved engelsk auksjon huset solgt til budgiveren med det høyeste bud marginalt over den med det nest høyeste bud.

Ved auksjonsform (4) vil optimal strategi for hver budgiver være å by den verdi en selv setter på huset i forvisning om at en kun trenger å betale det nest høyeste bud. Ingen budgiver har fordel av å by mindre, siden dette vil redusere sjansen for å få huset uten at prisen en må betale reduseres. Ei heller har en fordel av å by mer, siden dette bare øker sjansen for å vinne dersom også det nest høyeste bud er over ens egen verdiansettelse, og i så fall ender en opp med å betale mer enn hva huset er verdt (for en selv). Dersom alle byr sin private verdi vil altså huset bli solgt til høyeste byder til en pris for nest høyeste bud, som bare vil være marginalt forskjellig fra hva som oppnås ved (1).

For å belyse auksjonsform (2) tenker vi at det er n budgivere og at budgiver nr. i byr b_i på auksjonsobjektet som av budgiveren blir vurdert til verdi v_i . La $p(b)$ være sannsynligheten for at et bud lik b vinner budrunden. Resonnementene nedenfor innebærer en del betingning uten at dette blir synliggjort i notasjonen.

Forventet gevinst ved auksjonen for budgiver nr. i er da (alle budgivere er risikonøytrale!)

$$H_i = (v_i - b_i) p(b_i)$$

Siden alle budgivere står ovenfor det samme maksimeringsproblem, er det rimelig å anta at $b_i = g_i(v_i)$, der g har positiv derivert med invers h . Følgelig kan vi skrive

$$p(b_i) = P(\max_{j \neq i} g(v_j) < b_i) = P(\max_{j \neq i} v_j < h(b_i))$$

Antar vi at v_j 'ene er stokastisk uavhengige trekninger fra en kumulativ fordeling F blir

$$p(b_i) = (F(h(b_i)))^{n-1} = (F(v_i))^{n-1}$$

Dersom budgiver nr. i vil maksimere forventet gevinst må vi ha

$$p'(v_i)(v_i - b_i) - p(b_i) = 0$$

Sammenholdes de to siste ligningene får vi

$$(n-1) f(h(b_i)) h'(b_i) (v_i - b_i) - F(h(b_i)) = 0$$

For tilfellet at F er rektangulært fordelt $[0, 1]$ blir dette

$$(n-1) h'(b_i) (h(b_i) - b_i) - h(b_i) = 0$$

Denne ligningen har løsning

$$v_i = h(b_i) = \frac{n}{n-1} b_i$$

Forventet pris blir da

$$\frac{n}{n-1} E \max v_i = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{n-1}{n+1}$$

Hvis vi så sammenligner dette med (1) som var ekvivalent med (4), der det var optimalt å by egen verdsatt verdi, blir forventet pris i tilfellet med uavhengige $R [0, 1]$ trivielt lik $(n-1)/(n+1)$, dvs. samme som ved (2). Altså er alle de fire auksjonsformer ekvivalente under de gitte forutsetninger.

[Innholdsliste](#)

[Pusleri nr. 5](#) (løsning)

Oppgave 1 (løsning): Den enkleste løsningen på oppgaven er trolig følgende: Kast den skjeve mynten to ganger. Hvis utfallene er like, dvs. KK eller MM, se bort fra resultatet. Hvis utfallene er ulike, dvs. KM eller MK bruk utfallet i det første kastet. Hvis en ønsker en følge av uavhengige utfall med $P(K)=P(M)=1/2$, kan en praktisk generere to følger med den skjeve mynten, stille de opp under hverandre og sammenligne de to utfallene i samme posisjon. Hvis de matcher, stryk begge, hvis de er forskjellige, bruk utfallet i den første sekvensen. Eksempelvis:

M M K M K K K M K K M K M M K M
M K M K K K M K K M K M M K K M

Her blir den rettferdige sekvensen sammensatt av de som er understreket i første linje.

Et annet forslag er: Generer en følge med den skjeve mynten, f.eks. slik at vi får

M,M,K,M,K,K,K,M,K,K,M,K,M,M,K,M,..... (1)

Grunnet symmetri kan vi snu annenhver mynt, slik at (1) blir til

M,K,K,K,K,M,K,K,K,M,M,M,M,K,K,K,..... (2)

som kan betraktes som trekninger fra en rettferdig mynt.

Det er en hake ved dette resonnement, nemlig at $P(K)=P(M)=1/2$ bare gjelder i stasjonærsituasjonen, som vanskelig kan realiseres uten en rettferdighetsmekanisme, f.eks. ved å neglisjere et jamt eller odde antall kast i starten med lik sannsynlighet.

Men selv i stasjonærsituasjonen blir dette ikke uavhengige realisasjoner. Vi får nemlig $P(KK)=P(MM)=p(1-p)$ og $P(KM)=P(MK)=(p^2+(1-p)^2)/2$, mens uavhengighet skulle gi $1/4$. Dette forslaget er imidlertid et godt utgangspunkt for å diskutere sentrale begreper, som uavhengighet, Markovkjede, stasjonæritet etc.

Takk til Øystein Arild for innspill.

Oppgave 2 (løsning): La g_n være sannsynligheten for at KK forekommer i n kast. Ved å betinge mhp. utfallet av første kast får vi

$$g_n = \frac{1}{2}g_{n-1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}g_{n-2}\right) = \frac{1}{2}g_{n-1} + \frac{1}{4}g_{n-2} + \frac{1}{4} \quad g_0 = g_1 = 0$$

Denne inhomogene differensligning kan løses på vanlig måte med løsning av form

$$g_n = 1 + A_1 r_1^n + A_2 r_2^2$$

der r er røttene i ligningen $r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{4} = 0$.

Dette gir

$$g_n = 1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n$$

Det fins en lettere vei:

Sett $f_{n+2} = 2^n - 2g_n$. Da blir

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \quad f_2 = 1 \quad f_3 = 2$$

som er den velkjente ligning som gir Fibonacci-tallene, som er tabellert bl.a. i Råde & Westergren: Mathematics Handbook.

Oppgave 3 (løsning): Har noen en vakker løsning, så kom med den. Min er det ikke!

Fra Grete U. Fenstad er mottatt: Som en mulig oppfølging av Pusleri nr.5 har den læreboka vi bruker i ST114 Modellering ved stokastiske prosesser et par oppgaver som sammenligner forventet antall kast før henholdsvis KKM og KMK oppnås. Det er kanskje litt overraskende at KKM gjennomsnittlig oppnås raskere enn KMK, uansett hva $P(K)=p$ er. Ved en rettferdig mynt er svarene henholdsvis 8 og 10. Men resultatet kan forklares.

[Innholdsliste](#)

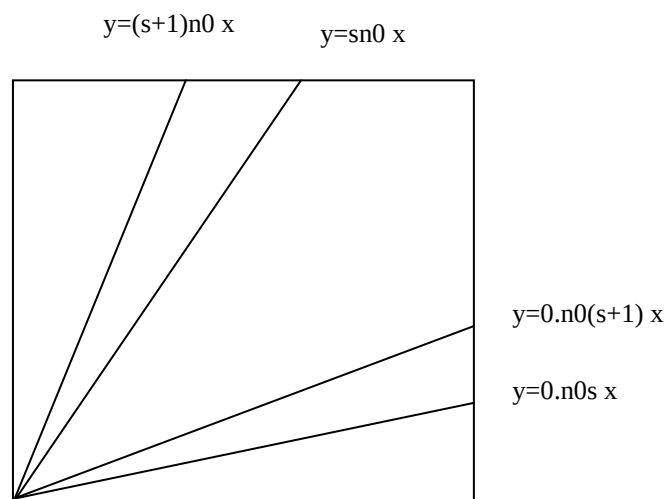
[Pusleri nr. 6](#) (løsning)

Sannsynligheten for at første gjeldende siffer i kvotienten er 1 er lik $1/3$!

Mer generelt er sannsynlighetsfordelingen til første gjeldende siffer:

$$p(s) = \frac{5}{9} \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{s(s+1)} \right) \quad \text{for } s=1,2,\dots,9.$$

Det er to hovedtilfeller: kvotient mindre enn 1 eller større enn 1. Problemet er redusert til å beregne og addere arealet av et uendelig antall trekanten av hvert slag. I figuren nedenfor er illustrert en trekant av hvert slag, der symbolikken $n0$ betyr n nuller. Den første trekanten med kvotient mindre enn 1 (for $n=0$) har areal lik 0.1×0.5 uansett s . Hver ny trekant av dette slaget har areal $1/10$ av det forrige. Den geometriske rekken som fremkommer har sum $10/9$, slik at det samlede arealet av disse trekantene fås ved å multiplisere med denne faktoren. Den første trekanten med kvotient større enn 1 (for $n=0$) har areal $(1/s - 1/(s+1)) \times 0.5 = 1/s(s+1) \times 0.5$. Igjen har hver ny trekant areal $1/10$ av den forrige, og vi får den samme geometriske rekken som ovenfor og samme faktor $10/9$ å multiplisere med.



[Pusleri nr. 7 \(løsning\)](#)

La G_n være gevinst etter n spill dersom en spiller optimalt. Så lenge $G_n > 0$ er forventet gevinst ved å fortsette ett nytt spill lik

$$\frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot (G_n + 2) + \frac{1}{6} \cdot (G_n + 3) + \frac{1}{6} \cdot (G_n + 4) + \frac{1}{6} \cdot (G_n + 5) + \frac{1}{6} \cdot (G_n + 6) = \frac{1}{6} (5G_n + 20)$$

Dette gir følgende karakterisering:

$$E(G_{n+1} | G_n) = \max(G_n, \frac{1}{6}(5G_n + 20))$$

Vi fortsetter derfor så lenge $G_{n+1} > G_n$ som skjer så lenge $G_n < 20$.

La F_s være forventet samlet gevinst ved optimalt videre spill, dersom en nå har sum øyne lik s . Vi søker da F_0 som finnes ved rekursiv beregning nedover med utgangspunkt i at $F_s = s$ for

$$s = 25, 24, \dots, 20, \text{ mens } F_s = \frac{1}{6}(F_{s+2} + F_{s+3} + F_{s+4} + F_{s+5} + F_{s+6}). \text{ Svaret er } F_0 = 8.1418.$$

Problemstillingen kan sikkert belyses ved andre metoder. Kan noen varte opp med martingalargumenter?

Sannsynlighetsfordelingen til gevinsten er mer brysom å finne. Den er

g	$P(G=g) \times 6^{10}$	$P(G=g)$
0	37 763 596	0.6245
20	6 029 263	0.0997
21	5 743 720	0.0950
22	4 485 916	0.0742
23	3 277 030	0.0542
24	2 128 294	0.0352
25	1 038 357	0.0172

Beregningen kan skje ved (omfattende) kombinatoriske opptellinger av gunstige på mulige. En alternativ tilnærming er å utnytte at situasjonen kan beskrives som en Markovkjede med 26 tilstander og overgangsmatrise med en enkel struktur, der 7 tilstander er absorberende. Overgangsmatrisen kan lett potenseres vha. programvare som Matlab eller Maple, som også kan gi eksakt løsning på brøkform.

Spillet kan simuleres med få kommandoer, eksempelvis i Minitab:

```
Random 10 c2; integer 1 6.  
Let c3=parsum(c2)*parprod(c2>1)  
Let k1=sum((c3>0)*(c3<20))  
Let k2=c3(k1+1)  
Stack k1 c1 c1
```

Her simuleres først 10 terningkast, som er det maksimalt antall nødvendige ($c2$). Delsummer (parsum) som beholdes eller nulles vha. den logiske variable ($c2>1$) beregnes og lagres ($c3$). Antall kast ($k1$) ett kast før stopp eller tap av alt er bestemt ved sum av produkt av to logiske variable. Gevinsten fins da $c3(k1+1)$, som puttes i $c1$, der resultatene ved gjentak av de 5 kommandoene bygger seg opp. De tre let-kommandoene lar seg skrive enda mer kompakt, men mindre gjennomskuelig.

Pusleri nr 8 (løsning)

Problemstillingen kan presiseres på minst to måter:

- (3) Belbert har n par sokker, men har somlet bort de fleste, har bare 24 igjen, og ingen av disse er par.
- (4) Belbert har 12 par sokker og har parret dem i ørska, men de passer ikke sammen.

Finn sannsynligheten ved begge presiseringer under rimelige antakelser. Hvor mange sokker måtte Belbert ha for at sjansen i (1) skal bli mer enn 50%?

Løsning (1):

$$\frac{\binom{n}{24} 2^{24}}{\binom{2n}{24}} = \frac{\binom{2n-24}{n} 2^{24}}{\binom{2n}{n}} = a_n$$

De gunstige består av et utvalg på 24 sokker et fra hvert par med to mulige valg fra hvert par. Omskrivingen er gjort for evt. å kunne benytte Stirlings formel ved beregningen.

Eksakt beregning, for eksempel i Maple, gir $a_{210} = 0.4983275905$ og $a_{211} = 0.5000746203$.

Uten "binomisk regnekapasitet", kan vi bruke rekursjon. Vi får nemlig for $n \geq 24$:

$$a_{n+1} = \frac{(2n-22)(2n-23)}{2(n-23)(2n+1)} a_n$$

Vi har ved Stirlings formel $a_{24} = 2^{24} / \binom{48}{24} \approx 0.520263 \cdot 10^{-6}$. Rekursjon gir da (med 5 desimaler)

$a_{210} = 0.498328$ og $a_{211} = 0.500075$. Svaret er altså $n=211$ par sokker.

Løsning (2):

Jeg hadde håpet på en elegant innsendt løsning, men den kom ikke. Dere får ta til takke med min løsning (vær vennlig å sjekk den for feil!). Den er basert på betinging som gir en todimensjonal differensligning, som jeg løser ved rekursjon. Merk at hadde det vært sko istedenfor sokker, ville oppgaven ha vært det berømte "hatteproblemet". Tenk deg en prosess med å velge ut to sokker av gangen, og beting mhp utfallet av første trekning, som, hvis det ikke er et par, kan være to sokker som var single igjen i haugen, eller en single og en som hadde sin "partner" igjen i haugen (kalt "dublett") eller to ulike dubletter. La det være $2n$ sokker igjen, der $2d$ er dubletter og $2s$ single.

La $P_{n,s}$ være sannsynligheten for ingen par blant $2n$ sokker som velges ut to av gangen fra en haug der det er $2s$ single (og $2d=2n-2s$ dubletter), der vi søker $P_{12,0}$. Vi får følgende ligning:

$$P_{n,s} = \frac{\binom{2s}{2}}{\binom{2n}{2}} P_{n-1,s-1} + \frac{\binom{2s}{1} \binom{2(n-s)}{1}}{\binom{2n}{2}} P_{n-1,s} + \left(1 - \frac{\binom{2s}{2} + \binom{2s}{1} \binom{2(n-s)}{1}}{\binom{2n}{2}}\right) P_{n-1,s+1}$$

Her er randkravene $P_{1,0} = 0$, samt $P_{n,-1} = 1$ og $P_{n,n} = 1$. Rekursjonen gir (ved bruk av Maple)

svaret $P_{12,0} = \frac{17070792512}{28748558475} = 0.5937964690$. Det er av en viss interesse å se hva som skjer

med $P_{n,0}$ når n vokser. Det ser ut som det går mot en grense på ca. 0.606 (for hatteproblemet er den tilsvarende grensen $e^{-1} = 0.3679$).

[Innholdsliste](#)

[Pusleri nr 9 \(løsning\)](#)

I første kast har vi ingen informasjon om hvilken side som er overmalt.

Antall øyne Y har sannsynlighetsfordeling

y		0	1	2	3	4	5	6
$P(Y=y)$	6/36	5/36	5/36	5/36	5/36	5/36	5/36	

og forventning $EY=35/12=2.91<3$. Imidlertid lønner det seg å forsette å spille inntil det er klarlagt om terningen gir oss en "pengepumpe" eller et "pengesluk". Vi kan ha 6 ulike terninger, hver med sannsynlighet $1/6$. La X =overmalt antall øyne. Da er $E(Y|X=x)$ gitt ved

x	1	2	3	4	5	6
$E(Y X=x)$	20/6	19/6	18/6	17/6	16/6	15/6

Dersom den overmalte siden er "1" eller "2" har vi en pengepumpe, mens dersom den overmalte siden "4", "5" eller "6" har vi et pengesluk. For "3" er fortsatt spill etter at terningen er "avslørt", rettferdige spill. Den optimale strategi er derfor å fortsette inntil dette er klarlagt. I utgangspunktet er forventet gevinst uendelig over en uendelig horisont, og tilbudet bør gripes med begjærighet. Spørsmålet om hva som gjør spillet rettferdig var en utlagt snubletråd. Er spørsmålet i det hele tatt meningsfylt? Vi har jo en blanding av spillehorisonter, før og etter terningen er avslørt, og det er vanskelig å definere rettferdighet som omfatter begge. Med en pengepumpe spiller det jo liten rolle hva man "søler vekk" i starten for å finne ut. I en reformulert oppgave, der vi tillater et gitt antall spill, ville spørsmålet ha vært meningsfylt. Kommentarer fra leserne er velkomne.

Digresjon: Merk flere andre måter som EY kan fremkomme på:

- (1) $EY=EE(Y|X)=1/6 \cdot (20+19+18+17+16+15)/6=105/36$.
- (2) $EY=(5/6) \cdot EX=(5/6) \cdot (7/2)$
- (3) $EY=7/2 \cdot (1/6) \cdot (7/2)$

De to siste kan argumenteres for ved at oppnådd gevinst ved kast med rettferdig terning "nulles ut" hvis den matcher et nytt uavhengig kast med terningen.

Pusleri nr 10 (løsning med bidrag fra Terje Aven)

Terje Aven: Da jeg var vit.ass ved UiO for over 20 år siden og underviste Markov-kjeder hadde jeg moro av å regne ut sannsynligheten for YATZY ved n kast (og andre sannsynligheter som f.eks. liten og stor straight). Hvis X_n er antall like etter n kast er X_n er diskret Markov-kjede med overgangs-sannsynligheter gitt ved

	1	2	3	4	5
1	$120/6^4$	$900/6^4$	$250/6^4$	$25/6^4$	$1/6^4$
2	0	$120/6^3$	$80/6^3$	$15/6^3$	$1/6^3$
3	0	0	$25/6^2$	$10/6^2$	$1/6^2$
4	0	0	0	$5/6$	$1/6$
5	0	0	0	0	1

Dermed blir n -te overgangssannsynlighetene gitt ved $P(n) = C D^n C^{-1}$, der D er diagonalmatrisen av egenverdiene ($120/1296$, $120/216$, $25/36$, $5/6$, 1), og C er matrisen av egenvektorer. Dette gir at sannsynligheten for YATZY etter n kast er

$$p_{15}(n) = 22/2496 (120/1296)^n - 8/9 (120/216)^n + 265/78 (25/36)^n - 105/32 (1080/1296)^n + 1$$

som gir spesielt $p_{15}(n) = 0.0460286$.

Første n som gir større verdi enn 0.5 er $n=10$ (0.56). I vår tippebok som ble utgitt for noen år siden (Aven, Haukås, Løvås: Tipping, Lotto, og andre spill, Mortensens Forlag), laget vi en kurve som viste sannsynligheten for YATZY som funksjon av n .

Basert på Markov-kjeden finner en forventet tid til absorpsjon i tilstand 5 ved å sette opp et sett av ligninger, gitt at en starter i tilstand i . La u_i betegne forventet tid til absorpsjon i tilstand 5. Da er

$$\begin{aligned} u_1 &= 120/1296 u_1 + 900/1296 u_2 + 250/1296 u_3 + 25/1296 u_4 + 1 \\ u_2 &= 120/216 u_2 + 80/216 u_3 + 15/216 u_4 + 1 \\ u_3 &= 25/36 u_3 + 10/36 u_4 + 1 \\ u_4 &= 5/6 u_4 + 1 \end{aligned}$$

Forventet verdi blir $u_1=11.0902$.

[Pusleri nr. 11](#) (løsning)

Siden det er majoriteten som bestemmer utfallet, er det bare i situasjonene der de $2n$ splitter stemmene likt at stemmegivningen til den sovende personen får betydning. Dersom denne stemmer uavhengig av de andre, vil sannsynligheten for "riktig" beslutning da være p , mens dersom denne stemmer som sidemannen, for eksempel til høyre for seg, vil sannsynligheten være $\frac{1}{2}$. Dersom den sovende person oppgir sin uavhengighet og stemmer som sidemannen vil derfor sjansen for riktig beslutning være uendret når $p = \frac{1}{2}$, øke når $p < \frac{1}{2}$ og avta når $p > \frac{1}{2}$.

[Pusleri nr. 12 \(løsning\)](#)

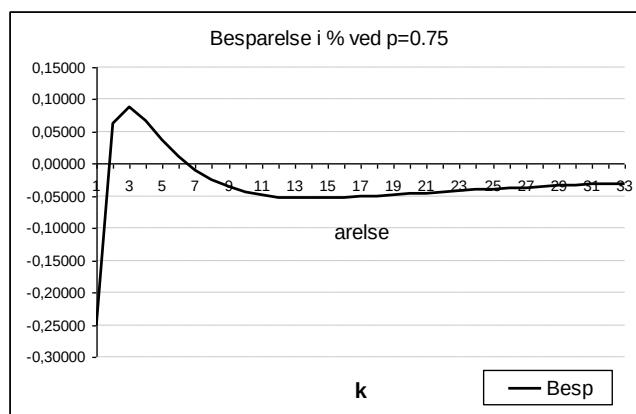
La p være sannsynligheten for at den enkelte vannkilde er ren. Ved n vannkilder og sammenblandinger fra k kilder, blir forventet antall tester som må gjøres lik

$$m_k = \frac{n}{k} (p^k + (1-p^k)(1+k)) = n \left(\frac{1}{k} + (1-p^k) \right)$$

Begrunnelse: Først utføres n/k analyser. For hver av disse er det sannsynlighet p^k for at ingen flere trengs og sannsynlighet $1-p^k$ for at ytterligere k analyser trengs. Forventet besparelse er derfor

$$f(k) = \frac{n - m_k}{n} = p^k - \frac{1}{k}$$

som selvfølgelig vokser med p , men ikke avhenger av n ! Vi skal for gitt p finne den p som gjør $f(k)$ størst mulig under forutsetning av at $f(k) > 0$. Dette er lett å implementere i Excel, med tilhørende aktiv link til figur av funksjonen der optimal k kan avleses:



Beregninger i Excel ga følgende tabell

p	0.60	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	0.99	0.999
k	1	3	3	3	3	4	5	10	32
f(k)	0%	0.1%	9%	14%	28%	40%	57%	80%	94%

En tabell som gir grensesannsynlighetene for ulike optimale batch-størrelser er.

k	1	3	4	5	6	7	8	9
p <	0.69335	0.875	0.934	0.959	0.972	0.979	0.984	0.987

Merk at $k=2$ aldri er optimalt!

Ser vi bort fra at k er heltall, kan vi gjøre følgende betraktning: For den kritiske verdi av p når det lønner seg å blande må vi ha $f(k)=0$ og $f'(k)=0$. Dette gir de to ligningene $p^k = 1/k$ og

$p^k \log(p) = -1/k^2$ som etter eliminasjon av p^k gir $\log(p) = -1/k$. Innsatt gir dette $k=e$ og dermed $p = e^{-1/e} \approx 0.6922$, dvs. noe lavere enn den eksakte (med fem desimaler) i tabellen.

[Innholdsliste](#)

Pusleri nr. 13 (løsning)

Optimal strategi er (i) i tilfellet med forskjellig antall kort igjen av hver farge å gjette den som det er flest igjen av, og (ii) er det like mange igjen av hver farge røde, spiller det ingen rolle hva en gjetter. Følger en slavisk denne strategi er en faktisk sikret 26 riktige fra de skjevfordelte situasjonene uansett. Det gjenstår da bare å finne forventet antall korrekte gjetninger fra de likefordelte situasjonene, der vi har fifty-fifty sjanse for å gjette riktig.

La $P_{n,n}$ bety sannsynligheten for situasjonen med n kort av hver farge oppstår. Forventet antall ganger en likefordelt situasjon oppstår er da

$$EX = E\left(\sum_{n=1}^{26} I_n\right) = \sum_{n=1}^{26} P_{n,n}.$$

Anta rettferdig stokking, dvs. at alle $m=52!$ ordninger av kortene er like sannsynlige. Vi har etter regelen om "gunstige på mulige":

$$P_{n,n} = \frac{\binom{26}{n} \binom{26}{n} 2n!(52-2n)!}{52!} = \frac{\binom{26}{n} \binom{26}{n}}{\binom{52}{2n}}$$

Argumentet for telleren er: Velg ut de n røde kort som skal være igjen, og de n sorte kort som skal være igjen. De $2n$ kortene kan ordnes på $2n!$ måter og de $(52-2n)$ kortene som allerede er borte kan ordnes på $(52-2n)!$ måter.

Svaret kan nok innses direkte, men resonnementet bør gå via nevnte antagelse.

Svaret på oppgaven blir derfor: $26 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{26} P_{n,n} = 30.040665.$

En annen tilnærming til oppgaven er ved rekursjon:

La $E(r,s)$ være forventet antall riktige gjetninger med r røde og s sorte kort igjen. Da har vi

$$E(r,s) = \frac{\max(r,s)}{r+s} + \frac{r}{r+s} E(r-1,s) + \frac{s}{r+s} E(r,s-1)$$

Programmering i Maple med randkravene $E(r,0)=r$ og $E(0,s)=s$ gir

$$E(26,26) = \frac{3\,724\,430\,600\,965\,475}{123\,979\,633\,237\,026}$$

[Pusleri nr. 14 \(løsning\)](#)

La p_k være sannsynligheten for at snilen i posisjon nr. k blir spist sist. Etter første skritt er en i en identisk situasjon der "vår" snile i posisjon nr. k har enten posisjon nr. $k-1$ eller $k+1$ i forhold til den situasjon som nå foreligger. Ved å betinge mhp første skritt har vi derfor differensligningen

$$p_k = \frac{1}{2}p_{k-1} + \frac{1}{2}p_{k+1} \text{ for } k=2, \dots, n-1$$

med tilleggskravene $p_k = p_{n+1-k}$ for $k=1, 2, \dots, n$ (pga. symmetri) og sum lik 1. Den karakteristiske ligning $r^2 - 2r + 1 = 0$ har dobbeltroten $r=1$, som betyr at den generelle løsning av ligningen er

$$p_k = A + B \cdot k$$

Tilleggskravet medfører at $B=0$, slik at $p_k = A$, og dermed $p_k = 1/n$. Det spiller altså ingen rolle hvor en plasserer seg for å maksimere sannsynligheten for å leve lengst.

Lar vi E_k være forventet levetid for snilen i posisjon nr. k har vi

$$E_k = \frac{1}{2}(1 + E_{k-1}) + \frac{1}{2}(1 + E_{k+1}) = 1 + \frac{1}{2}E_{k-1} + \frac{1}{2}E_{k+1} \text{ for } k=2, \dots, n-1$$

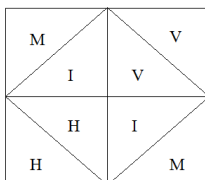
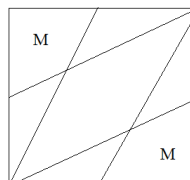
Med $E_0 = 0$ gjelder denne også for $k=1$. Tilleggskrav: $E_k = E_{n+1-k}$ for $k=1, 2, \dots, n$. Den generelle løsning er nå

$$E_k = E_k^* + A + B \cdot k$$

der E_k^* er en partikulær løsning av differensligningen. $E_k^* = k(n+1-k)$ er en slik. De to randkravene medfører imidlertid at $A=B=0$, slik at dette også er løsningen på vårt problem. Maksimering av denne gir som ventet at forventet levetid er størst i posisjonen(e) lengst vekk fra gåsen.

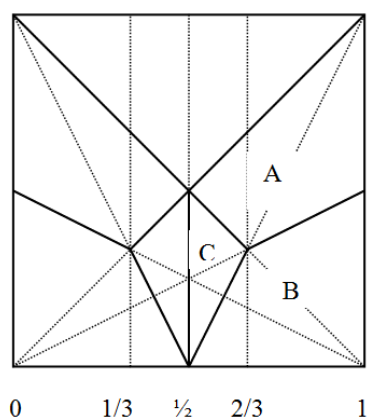
Pusleri nr. 15 (løsning)

Det enkleste er å betrakte problemet geometrisk, der posisjonen til de to treffpunktene er representert ved et punkt i enhetskvadratet, med uniform fordeling over dette, slik at sannsynligheter kan leses ut som arealer til områder. I figur a er representert følgende områder mht. pinnelengde større enn 0.5 : V=Venstre pinne, M=midtpinnen, H=Høyre pinne, I=ingen pinne. Vi ser at hver av de fire mulighetene har samme sannsynlighet $\frac{1}{4}$. I figur b er tilsvarende markert de to feltene der midtpinnen er størst, som til sammen utgjør $\frac{1}{3}$ av totalarealet, som dermed er den søkte sannsynlighet (som ventet?). Merk at de to skjæringspunktene $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ og $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ representerer like lange pinner og at forbindelseslinjen mellom disse er delelinjen for det gjenværende område mht. om venstre eller høyre pinne er lengst, som gir to femkanter.

Figur aFigur b

Pusleri nr. 16 (løsning)

Svaret er $2\ln(4/3)$. Flere tilnærminger fins. En mulighet er å klarlegge situasjonen geometrisk (jfr. pusleri nr. 15). I denne situasjon her ser figuren slik ut:



Her er den horisontale akse posisjonen av første hugg U_1 , og den vertikale akse posisjonen av annet hugg U_2 , som er uniformt fordelt gitt lengden av den lengste biten, dvs $\max(U_1, 1 - U_1)$. Av symmetrigrunner kan vi ta for oss høyre del av figuren, dvs. at venstrebiten etter første hugg er størst. Figuren kan deles i tre felter: A der venstrebiten etter siste hugg av lengde U_2 er størst og større enn den gjenliggende etter første hugg, B der høyrebit etter siste hugg av lengde $U_1 - U_2$ er størst og større enn den gjenliggende, og C der den gjenliggende bit av lengde $1 - U_1$ etter første hugg er større enn de to delte ved siste hugg. Strevsom integralregning over de gitte områder gir ledd som mirakuløst forsvinner i summen som forenkles til $\ln(4/3)$. Tilsvarende for venstre del av figuren, og doubling gir svaret. En enklere vei er utregning av forventning ved betinging: La X_i være lengde av lengste av de to bitene ved i'te hugg. Den lengste av de tre bitene etter annet hugg kan da skrives

$$X = X_2 \cdot I_{[X_2 > 1 - X_1]} + (1 - X_1) \cdot I_{[X_2 < 1 - X_1]}$$

Vi har da

$$E(X \mid X_1 = x) = E(X_2 \cdot I_{[X_2 > 1 - x]} \mid X_1 = x) + (1 - x) \cdot P(X_2 < 1 - x \mid X_1 = x)$$

Bruker en så at X_2 er Uniform $[x/2, x]$ betinget gitt $X_1 = x$ har en svaret med noe enklere integralregning enn ovenfor. Har noen en enda enklere, elegant løsning, som kanskje også er generaliserbar til mer enn tre biter?

Pusleri nr. 17 (løsning)

I situasjonen der spiller nr.1 ikke vet at spiller nr.2 titter, vil denne trekke på nytt dersom det første tallet er mindre enn 0.5. Dersom spiller nr.1 trekker på nytt, vil spiller nr.2 også gjøre det dersom dennes første tall er mindre enn 0.5. Spiller nr. 2 har $\frac{5}{8}$ sannsynlighet for å slå nr.1 når denne har trukket på nytt. Dersom spiller nr.1 ikke trekker på nytt, vet spiller nr.2 at spiller nr.1 sitt tall er minst lik 0.5, og at en derfor må sette grensen for å trekke på nytt noe høyere, la oss si ved a . Betinget gitt at spiller nr.1 ikke trekker på nytt vet spiller nr. 2 at spiller nr.1 sitt tall er uniformt fordelt $[0.5, 1]$. Anta at spiller nr.2 sitt første tall er på grensen a . Dersom hun trekker på nytt, er sannsynligheten for å vinne $\frac{1}{4}$, mens dersom hun ikke trekker på nytt er den $2(a - \frac{1}{2})$. På grensen må disse to sannsynlighetene være like slik at $2(a - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$, dvs. $a = \frac{5}{8} = 0.5125$. Betinget gitt at spiller nr.1 ikke trekker på nytt, beregnes sannsynligheten for at spiller nr.2 vinner, ved å betinge mhp om spiller nr.2 sin første trekning er mindre enn eller større enn $\frac{5}{8}$, som $\frac{5}{8} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{25}{64} = (\frac{5}{8})^2$. Sannsynligheten for at spiller nr.2 vinner er derfor $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{64} = \frac{65}{128} = \frac{1}{2} + \frac{1}{128}$, dvs. ikke rare fordelten.

I situasjonen der spiller nr.1 vet at spiller nr.2 titter synes det opplagt at spiller nr. 1 nå vil sette en grense større enn 0.5 for hva en er fornøyd med. Analysen er imidlertid langt mer. Komplisert. Undertegnede ga opp etter en stund. og forela problemet til Terje Lensberg, kollega med spillteori som spesial. Han mente at problemet best angripes via begrepet Perfekt Bayesiansk Likevekt, og ga kjapt sin løsning, som fyller flere sider, og der sluttsvaret kom ut av en tredjegradslikning. Tallsvaret (med forbehold om regnefeil) ble at spiller nr. 1 beholder alt over 0.567, mens spiller nr.2 beholder sitt tall først når dette er minst 0.661 og spiller nr.1 har beholdt sitt.

Pusleri nr. 18 (løsning)

Med samme forventet utfall, må summen av øynene på hver terning være den samme. Betrakter vi de tre tallene som ikke skal være med på hver terning, må disse derfor også ha en felles sum. Det er da bare to muligheter, nemlig at de tre utvalgene av utelatte er:

Mulighet 1:	$A^c = \{3, 5, 7\}$	$B^c = \{2, 4, 9\}$	$C^c = \{1, 6, 8\}$
Mulighet 2:	$A^c = \{3, 4, 8\}$	$B^c = \{2, 6, 7\}$	$C^c = \{1, 5, 9\}$

dvs. mengdene med ingen felles tall og felles sum 15. Med ett felles tall ville hvert par av komplementer av seks tall ha fire tall felles, og de øvrige to i hvert par har en felles sum. Dette medfører at slike terninger er likeverdige (av de 36 utfall er 16 vinst, 16 tap og 4 uavgjort). For de ovennevnte muligheter er terningene derfor:

$A = \{1, 2, 4, 6, 8, 9\}$	$B = \{1, 3, 5, 6, 7, 8\}$	$C = \{2, 3, 4, 5, 7, 9\}$
$A = \{1, 2, 5, 6, 7, 9\}$	$B = \{1, 3, 4, 5, 8, 9\}$	$C = \{2, 3, 4, 6, 7, 8\}$

Her er det tre felles tall i hver parvise sammenstilling, og opptelling gir

$$P(X_A > X_B) = 17/36 > 1/2$$

$$P(X_B > X_C) = 17/36 > 1/2$$

$$P(X_C > X_A) = 17/36 > 1/2$$

Pusleri nr. 19 (løsning)

For at oppgaven skal gi mening, må vi selvsagt forutsette ikke-negative variable.

Selv om $\text{var} S_n$ er proporsjonal med n , vil $\text{var} S_n^{1/2}$ ikke være proporsjonal med $n^{1/2}$, men faktisk holde seg begrenset, mens $\text{var} S_n^{1/4}$ vil gå mot null med n !

En begrunnelse kan like gjerne gå rett på $\text{var} S_n^r$ for $r \in [0, 1]$. For ikke-negative variable gjelder generelt at (bevis nedenfor):

$$\text{var } S^r \leq \frac{\text{var } S}{(ES)^{2(1-r)}}$$

Anvender vi dette på S_n får vi

$$\text{var } S_n^r \leq \frac{n\sigma^2}{(n\mu)^{2(1-r)}} = n^{-1+2r} \frac{\sigma^2}{\mu^{2(1-r)}}$$

For $r=1/2$ avhenger skranken ikke av n , mens for $r \in [0, 1/2]$ vil den gå mot null.

Bevis for ulikheten: For $t \geq 0$ gjelder at $|t^r - 1| \leq |t - 1|$ og følgelig $(t^r - 1)^2 \leq (t - 1)^2$.

For $a \geq 0$ og $b > 0$ gjelder derfor $((a/b)^r - 1)^2 \leq (a/b - 1)^2$ dvs. $(a^r - b^r)^2 \leq (a - b)^2 / b^{2(1-r)}$.

Vi får derfor

$$\text{var } S^r = E(S^r - ES^r) \leq E(S^r - (ES)^r)^2 \leq \frac{E(S - ES)^2}{(ES)^{2(1-r)}}$$

der første ulikhet følger av at forventning minimerer forventet kvadratisk tap.

(Ref: Jiri Anel: Mathematics of chance, Wiley 2001)

Pusleri nr. 20 (løsning)

(a) La X_n = utbetaling til spiller i n'te spill. Vi skal finne EX_n og betinger mhp beløp i potten etter foregående spill. La derfor Z_n = beløp i potten etter n'te spill. Vi har

$$E(X_n | Z_{n-1}) = \frac{1}{4}(Z_{n-1} + Z_{n-1}/2 - 1) \text{ som gir } E(X_n) = \frac{1}{4}(EZ_{n-1} + EZ_{n-1}/2 - 1) = \frac{3}{8}EZ_{n-1} - \frac{1}{4}.$$

$$\text{Nå er } E(Z_n | Z_{n-1}) = \frac{1}{4}(p + Z_{n-1} + Z_{n-1}/2 + Z_{n-1} + 1) \text{ som gir } E(Z_n) = \frac{5}{8}EZ_{n-1} + \frac{1}{4}(p+1).$$

$$\text{Med randkravet } EZ_0 = p \text{ gir dette } EZ_n = \frac{1}{3}((p-2)\left(\frac{5}{8}\right)^n + 2(p+1)).$$

Innsatt ovenfor får vi $E(X_n) = \frac{1}{8}(p-2)\left(\frac{5}{8}\right)^{n-1} + \frac{p}{4}$. For $p=2$ er forventningen uavhengig av n , mens den for $p>2$ er avtagende i n . Merk at $EX_1 = (3p-2)/2$ og at $EX_n \rightarrow p/4$.

(b) N =Antall spill til potten tømmes. Vi skal finne $EX_N = EE(X_N | N)$ der N er geometrisk fordelt. Vi

får tilsvarende ovenfor $E(X_N | N = n) = 2 + (p-2)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$, slik at

$$EX_N = E\left(2 + (p-2)\left(\frac{5}{6}\right)^{N-1}\right) = 2 + (p-2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \frac{1}{4} = \frac{14}{12} + \frac{5}{12}p \quad (=2 \text{ for } p=2).$$

[Pusleri nr. 21 \(løsning\)](#)

Antar kjent at den momentgenererende funksjon $M(t) = Ee^{tX}$ (hvis den eksisterer) entydig bestemmer fordelingen og at $M^{(n)}(0) = EX^n$. I vårt tilfelle har vi

$$M(t) = \sum_{n=0}^{\infty} M^{(n)}(0) \cdot \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{t^n}{n!} = t^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} = t^{-1}(e^t - 1) = \int_0^1 e^{tx} \cdot 1 dx = Ee^{tX}$$

Kommentar: At sekvensen av momenter ikke alltid entydig bestemmer fordelingen tør være velkjent, men ikke alle kjenner eksempler. Her er et:

La X være lognormal med tetthet $f(x)$, slik at $\ln X$ er standard normal, og la

Y ha tetthet $g(x) = f(x)(1 + \sin(2\pi \ln(x)))$ for $x > 0$. Da er $EX^n = EY^n = e^{n^2/2}$.

Her eksisterer ikke de momentgenererende funksjonene.

[Innholdsliste](#)

[Pusleri nr. 22](#) (Løsning av Karl Ove Hufthammer)

Se egen pdf-fil til slutt

[Innholdsliste](#)

[Pusleri nr. 23 \(løsning\)](#)

For uavhengige normalfordelte variable vet vi at $(X_1 - \bar{X}, X_2 - \bar{X}, \dots, X_n - \bar{X})$ er uavhengig av $\bar{X}$, og dermed også ordningsobservatoren $(X_{(1)} - \bar{X}, X_{(2)} - \bar{X}, \dots, X_{(n)} - \bar{X})$ uavhengig av $\bar{X}$. Følgelig $\text{cov}(X_{(i)} - \bar{X}, \bar{X}) = \text{cov}(X_{(i)}, \bar{X}) - \text{cov}(\bar{X}, \bar{X}) = 0$, slik at $\text{cov}(X_{(i)}, \bar{X}) = \text{var}(\bar{X})$ for alle i .

Vi har derfor spesielt for medianen $\rho(M, \bar{X}) = \sigma(\bar{X}) / \sigma(M)$ (både for n jamn og odde).

For uavhengige standardnormalfordelte er* $\text{var}(M) \approx \pi / 2n$, slik at $\rho(M, \bar{X}) \approx \sqrt{2 / \pi} = 0.798$.

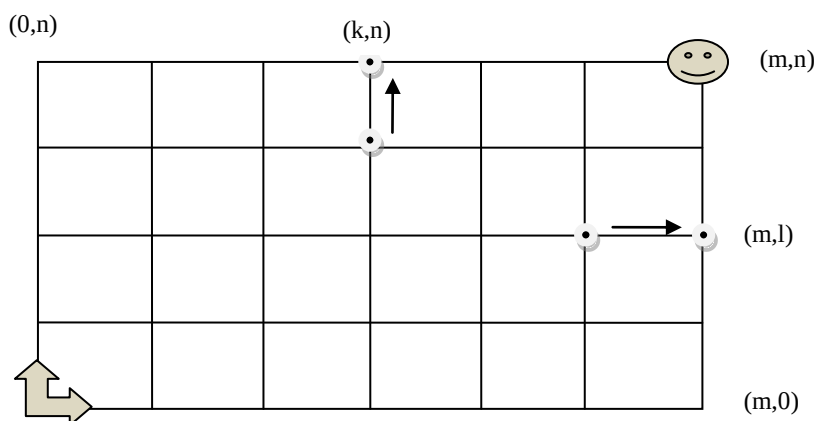
Uavhengigheten kan blant annet fås fra Basu's teorem, fordi $\bar{X}$ er suffisient for forventningen μ og $(X_1 - \bar{X}, X_2 - \bar{X}, \dots, X_n - \bar{X})$ er ansillær (fordeling som ikke avhenger av μ). Jeg tenkte så at det samme må gjelde for enhver lokasjonsfamilie som kan karakteriseres slik, men fant ingen slik familie, og med god grunn skal vi tro Nils. Imidlertid har vi for den dobbel-eksponensielle fordeling med lokasjon μ at M er suffisient og $(X_1 - \bar{X}, X_2 - \bar{X}, \dots, X_n - \bar{X})$ ansillær, som ifølge Basu gir uavhengighet. På samme vis som ovenfor får vi da $\rho(M, \bar{X}) = \sigma(M) / \sigma(\bar{X})$, med asymptotisk resultat $\rho(M, \bar{X}) \approx 1 / \sqrt{2} = 0.707$, som Nils har bekreftet.

* Se for eksempel Sverdrup: Lov og tilfeldighet Bind I, s.149

Nils Lid Hjort har gjort en dypere analyse av problemet. Hans bidrag finnes i Tilfeldig Gang April 2008.

Pusleri nr. 24 (løsning)

Du skal fra (0,0) til (m,n) i diagrammet, og kan alltid skifte retning, uhindret uten stopp inntil du kommer til randen av byen i nord (k,n) eller i øst (m,l).



Fra disse to punkter er forventet antall stopp henholdsvis $(m-k)/2$ og $(n-l)/2$. Vi betinger derfor mht. hvor en først treffer randen. Sannsynligheten for å treffe randen (k,n) langs en bestemt sti er opplagt $(1/2)^{n+k}$, og antall mulige stier av dette slaget som ikke treffer randen før, er

$$A(k,n) = \binom{k+n-1}{n-1}.$$

fordi dette må være lik antall mulige måter å komme til (k, n-1) på, og derfra direkte til randen. Setningen om dobbeltforventning gir derfor forventningen lik

$$E(m,n) = \sum_{k=0}^{m-1} A(k,n) (1/2)^{n+k} (m-k)/2 + \sum_{l=0}^{n-1} A(m,l) (1/2)^{m+l} (n-l)/2$$

Tilfellet $m=n$ kan forenkles, og gir (tilnærmingen med Stirling's formel)

$$E(n,n) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k-1}{n-1} (1/2)^{n+k-1} (n-k)/2 = n \binom{2n}{n} (1/2)^{2n} \approx \sqrt{\frac{n}{\pi}}$$

Summeringen krever litt omhu, med mindre man gjenkjenner følgende:

$$P(X = k) = \binom{n+k-1}{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+k-1} \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

som en fordeling knyttet til myntkast og kjenner dens forventning. Gjør du?

Pusleri nr. 25 (løsning)

Betrakt valg av eske A eller B som binomiske forsøk, der A er suksess og suksesssannsynligheten er $\frac{1}{2}$. At eske A finnes tom for første gang samtidig som B inneholder k fyrstikker, er ekvivalent med (n-k) fiaskoer før (n+1)te suksess, dvs. at en har suksess i forsøk nummer (n-k)+(n+1)=2n-k+1, mens de øvrige n suksesser kan plasseres på $\binom{2n-k}{n}$ måter. Vi får derfor sannsynligheten

$$\binom{2n-k}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1-k}, \text{ og tilsvarende for at B finnes tom først. Vi får derfor}$$

$$P(X = k) = \binom{2n-k}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k} \quad \text{for } k=0,1,\dots,n$$

De kumulative sannsynlighetene kan danne utgangspunkt for ulike betraktninger, eksempelvis med n=50 vil $P(X \leq 5) = 0.461605$, slik at det er mer enn 50% sjanse for mer enn 5 fyrstikker i den andre esken når den ene er tom

$$EX = \sum_{k=0}^n k \binom{2n-k}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}$$

Ved bytte av summasjonsvariabel (j=n-k, i=j-1), forkorting og velkjente kombinatoriske formler får vi

$$EX = \sum_{j=0}^n (n-j) \binom{n+j}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+j} = n - \sum_{j=0}^n j \binom{n+j}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+j}$$

$$= n - \sum_{j=1}^n (n+1) \binom{n+j}{j-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+j} = n - (n+1) \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+1+i}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1+i}$$

Tas den siste summen fra 0 til n+1 må vi få 1 (følger av vår fordeling med n+1 istedenfor n). Innsettelse av 1 med fradrag av de to manglende ledd gir etter forenkling:

$$EX = (2n+1) \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} - 1$$

For n=50 får vi EX=7.03851

Varianter av problemstillingen fins: Dersom en isteden spør etter antall i den andre esken når en for første gang tar siste fyrstikk i en eske, så er fordelingen

$$P(Y = k) = \binom{2n-k-1}{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k-1} \quad (k = 1, \dots, n) \quad \text{og} \quad EY = n \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}$$

Merk også at $P(Y = n-k) = \binom{n+k-1}{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+k-1} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$ som dukket opp i pusleri nr. 24, og er sannsynlighetsfordelingen til antall av det motsatte utfall straks en har fått n suksesser eller n fiaskoer i binomiske forsøk. Her blir $Y' = n - Y$ som dermed gir EY' .

[Pusleri nr. 26 \(løsning\)](#)

Løsning: La Z_k og Z'_k være hhv siktepunkt og treffpunkt i skudd k . Anta at treffets tilfeldige avvik fra siktepunktet er X_k , der $EX_k = 0$ og $\text{var}X_k = \sigma^2$, samt at slike avvik er uavhengige. Dersom vi starter med å skyte mot blinken $Z_0 = 0$, har vi (sjekk selv konsekvensen av å ikke gjøre det):

	Siktepunkt Z_k	Treffpunkt $Z'_k = Z_k + X_k$	Avvik fra $Z_0 = 0$
1	$Z_k = 0$ for alle k	$Z'_k = Z_0 + X_k$	$EZ'_k = 0$ $\text{var}Z'_k = \sigma^2$
2	$Z_k = Z_{k-1} - Z'_{k-1}$	$Z'_k = Z_{k-1} - Z'_{k-1} + X_k$ $= Z_{k-1} - (Z_{k-1} + X_{k-1}) + X_k = -X_{k-1} + X_k$	$EZ'_k = 0$ $\text{var}Z'_k = 2\sigma^2$
3	$Z_k = -Z'_{k-1}$	$Z'_k = -Z'_{k-1} + X_k$ $= -(Z_{k-1} + X_{k-1}) + X_k + \dots$ $= X_k - X_{k-1} + X_{k-2} - \dots \pm X_1 \pm Z_0$	$EZ'_k = 0$ $\text{var}Z'_k = k\sigma^2 \rightarrow \infty$
4	$Z_k = Z'_{k-1}$	$Z'_k = Z'_{k-1} + X_k$ $= (Z_{k-1} + X_{k-1}) + X_k + \dots$ $= X_k + X_{k-1} + X_{k-2} + \dots + X_1 + Z_0$	$EZ'_k = 0$ $\text{var}Z'_k = k\sigma^2 \rightarrow \infty$

Strategi 2 svarer til å reagere på tilfeldige avvik som om de var systematiske, og må korrigeres for. Dette forekommer ofte i praksis og påfører bare systemet økt variasjon. Dette er sentralt i Deming's ledelsesteorier. Strategi 4 finner vi igjen når vil blander ny farge iht sist brukte malespann, og også i "hviskeleken".

Pusleri nr. 27 (løsning)

A og B vil alltid skyte på hverandre. C's beste strategi er derfor å skyte i luften inntil en av opponentene er eliminert. Han har da neste skudd, noe som vil gi han en stor fordel. A'sjanser kan lettest finnes slik: Siden C skyter i luften dersom han trekkes ut først, betrakt derfor første duell mellom A og B. På grunn av loddtrekningen er det like sannsynlig at det er A som B som da har revolveren. Vi får:

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{3}{10}$$

Her svarer første ledd til at A har revolveren først av de to, og dermed eliminerer B, hvoretter C får revolveren og bommer, og annet ledd til at B har revolveren først av de to og bommer, men blir så eliminert, hvoretter C får revolveren og bommer. Videre får vi

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} + \dots \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \left(1 + \frac{1}{10} + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \dots\right) = \frac{4}{25} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{8}{45} \end{aligned}$$

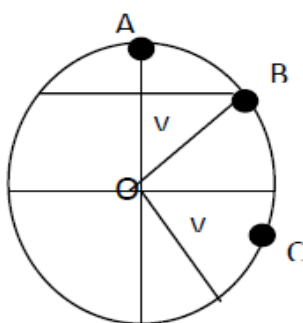
For å overleve må B få revolveren før A og så treffe A. Det er da et spørsmål om hvor lenge B og C bommer. Her svarer første ledd til at B har revolveren først og treffer A, mens C som da overtar revolveren bommer, hvoretter B så treffer C. I neste ledd går en runde til med bom for B og C osv. Dette gir at sannsynligheten for at C overlever er

$$P(C) = 1 - \frac{3}{10} - \frac{8}{45} = \frac{47}{90}$$

som er mer enn 50% sjansel!

[Pusleri nr. 28 \(løsning\)](#)

Vi kan, uten tap av generalitet, anta at A er fastlagt som Nordpolen. Vi har da to muligheter: (i) B og C faller begge på nordlig halvkule, som opplagt har sannsynlighet $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1/4$ og (ii) B og C faller på hver sin halvkule. I dette tilfelle er B bestemt ved vinkelen AOB, her kalt v .



Med sannsynlighet uniformt på kulen er det klart at sannsynlighetstettheten til denne vinkelen er $\sin v/2$ ($0 < v < \pi$). Tilfellet med B på nordlig halvkule med $0 < v < \pi/2$ er vist i snittfigur, der C i så fall må falle på kuleflate svarende til $v/2\pi$ av det totale areal (jfr. Den krumme siden av en appelsinbåt). Dette gir sannsynligheten

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin v \frac{v}{2\pi} dv = \frac{1}{4\pi}$$

Tilfellet med B på sørlig halvkule gir samme integralverdi, slik at søkte sannsynlighet blir $\frac{1}{4} + 1/2\pi$.

Pusleri nr. 29 (løsning)

Sannsynligheten for at en gitt person er sittende etter runde x er opplagt $1-(1/2)^x$. Derfor

$$P(X \leq x) = (1 - (\frac{1}{2})^x)^n$$

$$EX = \sum_{x=0}^{\infty} P(X > x) = \sum_{x=0}^{\infty} (1 - (1 - (\frac{1}{2})^x)^n) = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (-1)^{i+1} \frac{1}{1 - (\frac{1}{2})^i}$$

der den endelige summen fås ved bruk av Newtons binomialformel og deretter bytte av summasjonsrekkefølgen. Beregninger gir:

n	1	2	10	100	1 000	10 000	100 000
EX	2	8/3=2.67	4.73	7.98	11.3	14.6	17.9

Kan hende strever din programvare å beregne dette for stor n , pga "store" binomiske koeffisienter eller at rekken konvergerer langsomt. Kan asymptotisk teori hjelpe oss?

Situasjonen kan betraktes som en forgreningsprosess, der asymptotisk teori gir oss at

$$EX \sim \ln(n)/\ln(2),$$

som forteller at forventningen vokser mot uendelig med n . Den asymptotiske formel gir imidlertid ikke særlig god tilnærming, selv for n av størrelsesorden 100 000. Et nærmere studium av rekken ovenfor, der denne tilnærmes med et integral, gir oss ulikhetene

$$\frac{S_n}{\ln 2} < EX < \frac{S_n}{\ln 2} + 1$$

der $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ er den harmoniske rekke. En heltallskorreksjon gir oss følgende asymptotiske formel

$$EX \sim S_n/\ln 2 + 0.5$$

som overraskende nok gir riktig resultat med fire desimaler, selv for n så liten som 10!

Pusleri nr. 30 (løsning)

Spørsmålsformuleringen samsvarer med tilbakeholding av informasjon. De mulige utfallene er beskrevet i figuren, der hver av de fire boksene svarer til kjønn for første og annet barn, hhv. GG, GJ, JG og JJ. De $2 \times 7 \times 2 \times 7 = 196$ mulige utfallene antas å være like sannsynlige. Vi ser at det er 27 mulige utfall med minst en gutt født på tirsdag (uthevet), hvorav 13 har begge gutter (krysset i øverste venstre boks). Gitt at minst et barn er gutt født på tirsdag, er sannsynligheten for at begge er gutter $13/196 : 27/196 = 13/27$.

Mer generelt, dersom tilleggsopplysningen som gis har sannsynlighet p , blir den søkte sannsynlighet lik $(2-p)/(4-p)$. Vi ser at $p=0$ gir $1/2$ og $p=1$ gir $2/3$. Det siste er løsningen på den tradisjonelle varianten av problemet med tilbakeholding av kjønnsinformasjon, og hvor et sikkert ekstra utsagn er verdiløst. Det første er grensetilfellet for svært spesifikk ekstra informasjon, eksempelvis "Jeg har to barn, og en er gutt født 13 april" eller enda nærmere grensen: "Jeg har to barn, og en er gutt som heter Magne". Slik sett vil det altså gjøre noe hvis vi bytter ut "13 april" med "29 februar" og "Magne" med "Tjostolf"!

G/G	Ma	Ti	On	To	Fr	Lø	Sø	G/J	Ma	Ti	On	To	Fr	Lø	Sø
Ma															
Ti															
On															
To															
Fr															
Lø															
Sø															
J/G	Ma	Ti	On	To	Fr	Lø	Sø	J/J	Ma	Ti	On	To	Fr	Lø	Sø
Ma															
Ti															
On															
To															
Fr															
Lø															
Sø															

I den alternative konteksten at den første vi møter i to-barns familien er gutt, må vi presisere om ekstraopplysningen er gitt som "Jeg har to barn og (minst) en er født på tirsdag" eller at den første vi møter er gutt, som på spørsmål om hvilken dag han er født, svarer han tirsdag. I det første tilfellet kan en utvide utfallsrommet til å registrere hvilket kjønn det påtrufne barn har. Vi får da to tablåer som ovenfor, det venstre for påtruffet gutt, det høyre for påtruffet jente. Antar vi at det er like sannsynlig at det er første som annet barn som påtreffes først, blir sannsynligheten for de ulike utfall gitt ved $1/196$ multiplisert med den angitte faktor i hver av de fire 7×7 cellene i hvert tablå. Nå blir den søkte sannsynlighet etter forkorting i teller og nevner lik $13/(13+7)=13/20$.

G		J	
1	$1/2$	0	$1/2$
$1/2$	0	$1/2$	1

Dersom den gitte tilleggsopplysning har sannsynlighet p , blir den generelle formel $(2-p)/(3-p)$. Her ser vi at $p=0$ gir $2/3$, mens $p=1$ gir $1/2$. Det siste innebærer verdiløs tilleggsopplysning, og samsvarer med opprinnelige varianten av problemet, med den først påtrufne gutt, uten andre opplysninger.

Til slutt: I situasjonen der den første vi møter er gutt, og vi spør om hvilken dag han er født, er åpenbart sannsynligheten for at begge er gutter lik $1/2$ uansett guttens svar.

[Pusleri nr. 31 \(løsning\)](#)

La oppsettet for de fire kvartfinalene være (a_1, b_1) , (a_2, b_2) , (a_3, b_3) , (a_4, b_4) , der a betyr seedet og b useedet, og fotskrift er nummeret til gruppen/kampen. Anta at semifinalene er satt opp som (Vinner 1, Vinner 2) og (Vinner 3, Vinner 4). La $q=1-p$

- (a) Laget må vinne oppsatt kvartfinale og deretter vinne semifinalen, der en må betinge med hensyn på hva slags vinner (seedet eller useedet) som vinner den tilhørende oppsatte gruppe. Vi får

$$A_i = a_i \text{ kommer til finalen, } P(A_i) = p \cdot (p \cdot \frac{1}{2} + q \cdot p) = p^2(1+2q)/2 = r$$

$$B_i = b_i \text{ kommer til finalen, } P(B_i) = q \cdot (q \cdot \frac{1}{2} + p \cdot q) = q^2(1+2p)/2 = s.$$

La C_i = lag fra gruppe nr. i kommer til finalen, Da er $P(C_i) = P(A_i) + P(B_i) = r + s = 1/2$, som det bør være, siden vi har seks ("fire over to") mulige kombinasjoner av (kvartfinale)grupper for de to finalelag som må være like sannsynlige, og tre av disse har lag fra gruppe nr. i.

- (b) For å vinne turneringen må en komme til finalen og vinne denne, som krever betinging med hensyn til hva slags lag som blir motstander i finalen, seedet eller useedet. På grunn av oppsettet er det fire mulige motstandere, to av hvert slag. Vi får

$$A_i^* = a_i \text{ vinner turneringen } P(A_i^*) = r \cdot (r \cdot \frac{1}{2} + r \cdot \frac{1}{2} + s \cdot p + s \cdot p) = r \cdot (r + 2sp).$$

$$B_i^* = b_i \text{ vinner turneringen } P(B_i^*) = s \cdot (s \cdot \frac{1}{2} + s \cdot \frac{1}{2} + r \cdot q + r \cdot q) = s \cdot (s + 2rq).$$

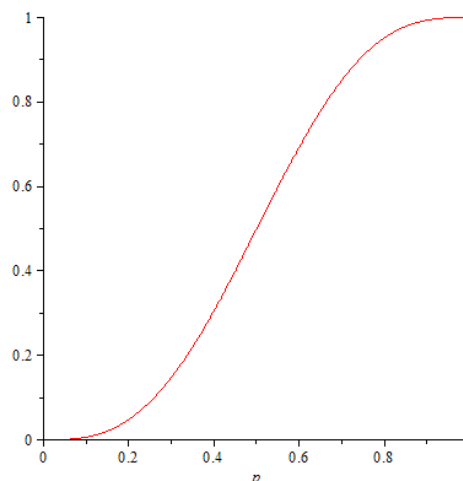
$$C_i^* = \text{lag fra gruppe nr. i vinner turneringen. Da er } P(C_i^*) = P(A_i^*) + P(B_i^*) = 1/4 \text{ (som sjekk)}$$

- (c) A = seedet lag i finalen $P(A) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = 4r - 4r^2 = 4r(1-r)$

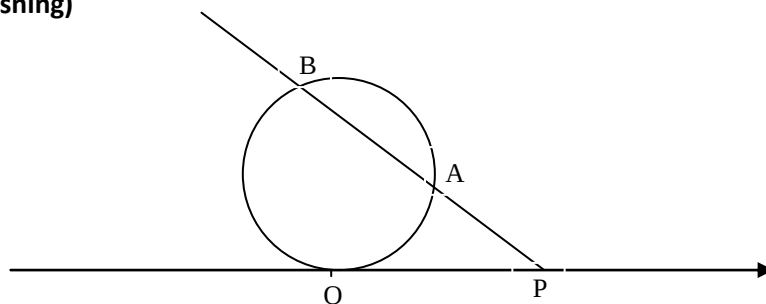
$$B = \text{useedet lag i finalen } P(B) = 4s - 4s^2 = 4s(1-s)$$

Dette beregnes ved summen av de fire $P(A_i) = r$ minus $P(A_i \cap A_j) = r^2$ for de fire tillatte kombinasjoner (der begivenhetene blir uavhengige), og tilsvarende for $P(B)$.

- (d) $A^* = \text{seedet lag vinner turneringen } P(A^*) = 4 \cdot P(A_i^*)$ pga. union av disjunkte begivenheter
 $B^* = \text{useedet lag vinner turneringen } P(B^*) = 4 \cdot P(B_i^*)$.



Sannsynligheten for at seeded lag vinner som funksjon av p

Pusleri nr. 32 (løsning)

Svar: Kjikvadratfordelt med en frihetsgrad!

Den geometriske setningen kalt "punkts potens" sier: Trekk en linje fra et gitt punkt som krysser en gitt sirkel. Da er produktet av avstanden fra punktet til de to krysningspunktene det samme uansett hvordan du trekker linjen. Dette gir oss grensetilfellet $PA \cdot PB = OP^2 = X^2$, dvs. kvadratet av en $N(0,1)$ variabel.

Løsningen avhenger selvfølgelig av at dine geometrikunnskaper er intakt, men beviset for "punkts potens" er enkelt (og fremdeles pensum i videregående skole): De to trekantene $\triangle OPA$ og $\triangle BPO$ er formlike (likedannede), siden de har en felles vinkel og de to periferivinklene $\angle POA$ og $\angle OBA$ fanger opp samme bue og dermed må være like (har du glemt det også, bevis det!). Vi har da $PA/PO = OP/BP$.

Merknad. Oppgaveformuleringens "tilfeldig" og betinget "gitt" var med hensikt for å villed: Konklusjonen krever ingen antakelse om tilfeldighet, og det kreves heller ingen hard regning.

Pusleri nr. 33 (løsning)

Det kan se ut som det ikke fins noen god strategi der en på forhånd har avtalt akkurat hvilke dører hver spiller skal åpne. Vi må altså lete etter en sekvensiell strategi som utnytter hva som skjer underveis. Er det mulig når vi ikke kan formidle informasjon mellom spillerene? Ja! Muligheten ligger i å lete etter strategi der utfallet for spillerene ikke er uavhengige, men positivt korrelerte, dvs. hvis en lykkes/mislykkes så er det også stor sjanse for at de andre lykkes/mislykkes.

Strategi: La skapene være nummerert fra 1 til 10, og at man enes om en nummerering av spillerne fra 1 til 10, f.eks i den rekkefølge de går inn. Spiller nr. i starter med å åpne skap nr. i. Spilleren noterer seg nummeret til den spiller bildet i skapet tilhører og åpner deretter skapet med dette nummeret. Spilleren fortsetter på samme måte til de 5 tillatte skap er åpnet.

La oss se på noen eksempler med plassering av bildenumre i de 10 skapene:

Skap nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Sykluser
Eks. 1	6	8	9	7	2	4	1	5	10	3	(6 4 7 1)(8 5 2)(9 10 3)
Eks.2	6	7	8	9	3	2	1	5	10	4	(6 2 7 1)(8 5 3)(9 10 4)
Eks.3	6	8	3	7	9	4	10	5	2	1	(6 4 7 10 1)(8 6 9 2)(3)
Eks.4	6	8	2	7	1	4	10	9	3	5	(6 4 7 10 5 1)(8 9 3 2)
Eks.5	6	8	9	7	1	4	10	2	3	5	(6 4 7 10 5 1)(8 2)(9 3)

I eksempel 1 ser vi at når spiller 1 åpner skap nr. 1 finner han bildet til spiller nr. 6. Når skap nr. 6 åpnes finner han spiller nr. 4, og når skap nr. 4 åpnes finner han spiller nr. 7 hvoretter han åpner skap nr. 7 og finner spiller nr. 1 som er han selv. Spiller nr. 1 lykkes altså. Spiller nr. 2 begynner med å åpne skap nr. 2 og finner spiller nr. 8, og åpnes skap nr. 8 finner han spiller nr. 5, og åpnes skap nr. 5 finner han nr.2, sitt eget bilde. Spiller nr 3 vil i sin tur finne spiller 9, 10 før han selv, nr. 3, dukker opp. Vi ser at hver spiller entydig tilhører en bestemt syklus. I Eksempel 1 var det akkurat tre sykluser som er listet i høyre kolonne i tabellen. Spiller nr. 4 vil oppleve samme syklus som spiller nr. 1 osv. Eksempel 2 har også tre sykluser, men her vil spiller nr. 2 se samme syklus som spiller nr. 1, før spiller nr. 3 og spiller nr. 4 møter de to andre syklusene. Vi skjønner nå at alle vil lykkes såfremt alle syklusene har høyst 5 elementer. Ovenfor vil en altså lykkes dersom plasseringene er som i eksemplene 1-3, og alle i den lange syklen på seks mislykkes i eksemplene 4 og 5.

Sannsynligheten for å mislykkes kan derfor beregnes som sannsynligheten for at det forekommer en sykel av minst seks elementer. Det er lett å vise at dette er lik

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} = \frac{1627}{2520} = 0.6456,$$

slik at den søkte sannsynlighet blir 0.3544.

Generelt: Med $2n$ spillere som hver får åpne n skap, er sannsynligheten for en m -sykel for $m > n$

$$\frac{\binom{2n}{m} \cdot (m-1)! \cdot (2n-m)!}{2n!} = \frac{1}{m}$$

Merk at summen fra $n+1$ til $2n$ som går mot $\ln(2)=0.6931$ når n går mot uendelig. Sannsynligheten er altså minst 0.3069 får å lykkes uansett hvor mange spillere det er!

Merknad: Problemstillingen tilskrives Peter Bro Miltersen, professor i computer science i Aarhus, som spredte den i sitt fagmiljø rundt 2003, og der kollegaen Sven Skyum bidro med denne overraskende vellykkede strategien.

[Innholdsliste](#)

Pusleri nr. 34 (løsning)

Ventetiden til fullstendig samling må være lik summen en rekke geometrisk fordelte ventetider med avtagende suksessannsynligheter når en mynt man ikke hadde før mottas. Forventningen blir:

$$\frac{50}{50} + \frac{50}{49} + \dots + \frac{50}{1} = 50 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{50} \right) = 224.96$$

Forventet ventetid til Per også har sin samling komplett kan løses slik:

La m være antall ulike mynter Jenny har alene og n være antall ulike mynter Per har (og derfor begge har). Vi har da følgende overgangssannsynligheter:

$$\begin{aligned} (m, n) &\rightarrow (m, n) && n/50 \\ &(m+1, n) && 1 - m/50 \\ &(m, n+1) && (m-n)/50 \end{aligned}$$

La $f(m, n)$ være forventet antall flere mynter som trengs for full samling ved start i (m, n) . Da har vi

$$\begin{aligned} f(m, n) &= 1 + \frac{n}{50} f(m, n) + \left(1 - \frac{m}{50} \right) f(m+1, n) + \frac{m-n}{50} f(m, n+1) \text{ som gir} \\ f(m, n) &= \left(1 - \frac{n}{50} \right)^{-1} \left(1 + \left(1 - \frac{m}{50} \right) f(m+1, n) + \frac{m-n}{50} f(m, n+1) \right) \end{aligned}$$

Vi ønsker $f(0, 0)$, og har randkrav $f(m, 50) = 0$ og $f(50, n) = 50 \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{50-n} \right)$.

Beregninger basert formelen ovenfor er enkel ved bruk av regneark og relativ adressering: La linjer og kolonner være henholdsvis (m, n) i omvendt rekkefølge fra 50 til 0. Etabler først marginalene i første kolonne og første linje i tabellen i henhold til randkravene ovenfor. Skriv formelen med relativ adressering i neste sør-østlige rute. Kopier formelen til hele trekanten. Da leser vi tallet $f(0, 0) = 324.80$ og $f(47, 34) = 197.08$, som besvarer de to siste spørsmålene.

Kommentar: I "gamle dager" ville en trolig forsøkt å løse den bivariate differensligningen ved å innføre generende funksjoner, og ende opp med en partiell differensialligning som trolig krever en numerisk løsning. Regneark som Excel muliggjør løsninger på mange problemstillinger uten å gå veien om en sluttet formel med tilhørende teknikaliteter. Dette bør ha en viss konsekvens for våre undervisningsopplegg, og reiser samtidig spørsmålene: Hva er en løsning? Når er et problem løst?

AZ52		fx = (1+(1-\$A52/50)*AZ51+(\$A52-AZ\$1)*AY52/50)/(1-AZ\$1/50)								
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		50	49	48	47	46	45	44	43	42
2	50	0	50	75	91,66667	104,1667	114,1667	122,5	129,6429	135,8929
3	49	0	100	112,5	122,2222	130,2083	137	142,9167	148,1633	152,8795
4	48	0		137,5	143,9815	149,5949	154,5569	159,0102	163,0539	166,7603
5	47	0			160,6481	164,8582	168,6775	172,1772	175,4101	178,4164
6	46	0				177,3582	180,4136	183,256	185,9154	188,4159
7	45	0					190,4136	192,7822	195,0202	197,1425
8	44	0						201,1156	203,0339	204,8654
9	43	0							210,1767	211,7793
10	42	0								218,0293
									318,7373	318,9154
										320,0023
										320,1759
										320,3487
										320,5208
										320,6922
										321,2397
										321,4089
										321,5775
										321,7453
										322,4506
										322,6157
										322,7801
										323,6361
										323,7973
										324,7973

[Pusleri nr. 35 \(løsning\)](#)

Ekspoenensielt fordelt med forventning 2.

Argumentasjon: Ved å utvide den første situasjonen til fire dimensjoner får opplagt en uniform fordeling på den firedimensjonale kuleflaten. Den andre situasjonen er da representert som en projeksjon ned i to dimensjoner, dvs. fjerne koordinat 3 og 4, som gir en uniform fordeling på kuleskiven. Z er altså en sum av to kjikvadratfordelte variable med en frihetsgrad, og derfor eksponensiell med forventning 2.

Argumentet henger altså på at projeksjonen av en uniform kuleflate i n dimensjoner er uniform i "det indre" av det projiserte område til dimensjon $n-2$. Dette er et generelt resultat som var kjent for Arkimedes i tilfellet $n=3$, i forbindelse med hans arbeid med å bestemme arealet av kuleflaten. Med han på laget finner dere sikkert ut at det også gjelder for $n=4$. Merk at uniformitet ikke oppnås med å gå kun en dimensjon ned.

Referanse: Letac: Integration and Probability, Springer (1995) s. 92-93 eller hans notat "From Archimedes to statistics: the area of the sphere", lett tilgjengelig fra nettadressen <http://www.math.univ-toulouse.fr/~letac/Archimede.pdf>

[Pusleri nr. 36 \(løsning\)](#)

Anta uten tap av generalitet at plassene på balkong er nummerert fra 1 til n , og at publikum slipper inn i denne rekkefølge i henhold til billetten. For hver som slipper inn holder vi rede på om denne, i henhold til billetten, inntar sin tildelte plass, person nr. 1 sin plass, person nr. n sin plass eller en annens plass.

Vi merker oss at det hele er avgjort straks plass nr. n er besatt, men også straks plass nr. 1 er besatt, idet dette innebærer at denne personen har byttet plass med nr. 1, og dermed åpner for at alle etterfølgende finner sin egen plass. Vi åpner døren og person nr. 1, som roter det hele til, velger plass nr. 1 og plass nr. n med like store sannsynligheter $1/n$. Velges en av disse er det hele avgjort. Hvis ikke, vil person nr. 2 enten finne sin plass ledig og innta den, eller dersom den ikke er ledig, vil det igjen være like stor sjanse, nå $1/(n-1)$, for at plass nr. 1 og plass nr. n velges, og det endelige utfall gitt. Slik vil det være for hver etterfølgende publikummer inntil den nest siste. Vi innser at, for de som finner sin egen plass ledig og setter seg der, kan vi gå videre og slippe neste inn, uten at dette har noen konsekvenser for den søkte sannsynlighet. Når den som ikke finner sin egen plass ledig velger en plass forskjellig fra nr. 1 og nr. n og setter seg der, vil den neste som slippes inn møte samme situasjon som den forrige, men med et ledig sete mindre. Vi kan fortsette dette inntil person nr. $n-1$, som nødvendigvis står overfor to ledige seter, nemlig nr. 1 og nr. n , som igjen velges med like store sannsynligheter, nå $\frac{1}{2}$, som derfor også gir siste person nr. n som slippes inn sannsynlighet $\frac{1}{2}$ for å få sin egen plass. Den sekvensielle argumentasjonen ovenfor med utfall uten konsekvens og like sannsynligheter for de to alternativene godtgjør at også sannsynligheten før døren åpnes er $\frac{1}{2}$ for at den siste får sin plass i henhold til billetten.

Ved samme argumentasjon følger det at person nr. k har sannsynlighet $(n-k+1)/(n-k+2)$ for å finne sin egen plass ledig ($k > 1$).

[Pusleri nr. 37 \(løsning\)](#)

Hver av dem står overfor åtte mulige arrangementer av de to fargene, men har bare delvis informasjon. Nummererer vi arrangementene for Ole, Dole og Doffen i denne rekkefølge er disse BBB, BBG, BGB, GBB, GGB, GBG, BGG, GGG. Doffen innser at for hvert arrangement der han gjetter rett, finnes et arrangement der han gjetter feil med den samme tilgjengelige informasjon. Når han eksempelvis ser GGx, er det to muligheter GGG og GGB, hvorav det ene er rett og det andre feil. Det dermed er umulig å oppnå full sikkerhet for å lykkes. Doffen får det for seg at det må være mulig å finne en strategi der alle tar feil på det samme arrangementet, noe som kan åpne for at det blir gjettet riktig på de andre arrangementene. For å ha størst mulig sjanse for at det skjer, er det kanskje lurt å sikre at det kun er en som gjetter på disse arrangementene. Følgende strategi oppnår dette:

Dersom du ser to hjelmer med lik farge, gjettt at du selv har motsatt farge av hva du ser.

Dersom du ser to hjelmer med ulik farge si Pass.

Arrang.	BBB	BBG	BGB	GBB	BGG	GBG	GGB	GGG
Gjetninger	GGG	PPG	PGP	GPP	BPP	PBP	PPB	BBB
Utfall	Taper	Vinner	Vinner	Vinner	Vinner	Vinner	Vinner	Taper

Vi vinner altså i seks av de åtte utfallene. Dette gir sjansen $6/8$ dvs 75% sjanse for å vinne. Bedre er det ikke mulig å gjøre det!

Det er interessant å se hva som skjer når flere personer enn tre deltar. Intuitivt bør sjansen for å lykkes øke, idet mer informasjon utveksles, i hvert fall så lenge en finner optimale strategier der arrangementene innebærer at bare en person gjetter. Allerede for $n=4$ blir problemstillingen ugrei (forsøk selv!), og det ser det ut til at det ikke er mulig å oppnå mer enn 75% sjanse, og at en like gjerne kan bestemme seg for ignorere fjerdemann. Problemstillingen kan imidlertid formuleres innen rammen av kodeteori, og det viser seg at tilfeller der $n=2^k-1$ er greie, i den forstand at det fins «perfekte» koder som beskriver den optimale strategien med sannsynlighet $(2^k-1)/2^k$ for å lykkes. Eksempelvis er den optimale strategien for tilfellet $n=7$ ekvivalent med den såkalte Hamming(7,4)-koden, som er velkjent innen teorien for feilkorrigerende koder. Den gir sjansen $112/128=7/8=87.5\%$ for å lykkes, og kan beskrives slik:

Betrakt alle mønstre som passer med følgende to BBBBBB, BBGBGGG, med tillegg av alle mønstre som fås ved rotasjon og komplement, som gir 16 mønstre i alt, Dvs. at man ikke gjør forskjell på fargen, og startpunkt for nummereringen hvis man står i sirkel. Dersom det du ser samsvarer med et av disse 16 mønstre, gjettt det motsatte av det som står på din plass i mønstret. Dersom det du ser ikke samsvarer med et av disse 16 mønstre, si Pass.

Optimale strategier for tilfellene $n=5$ og $n=6$ er mer kompliserte, men for $n=6$ kan oppnås $25/32=78\%$ sjanse (Taussky & Todd, 1948) og for $n=6$ kan oppnås $52/64=81\%$ (Staunton & Kalbfleisch, 1968). Hva som er mulig å få til er beskrevet innen området «covering codes», som er beslektet med feltet «sphere packings». Lignende problemer har også vi i forbindelse med fotball-tipping, nemlig ved konstruksjon av skemaer som gir minimumsgarantier for gevinst, gitt at et antall såkalte «sikre» kamper er valgt rett.

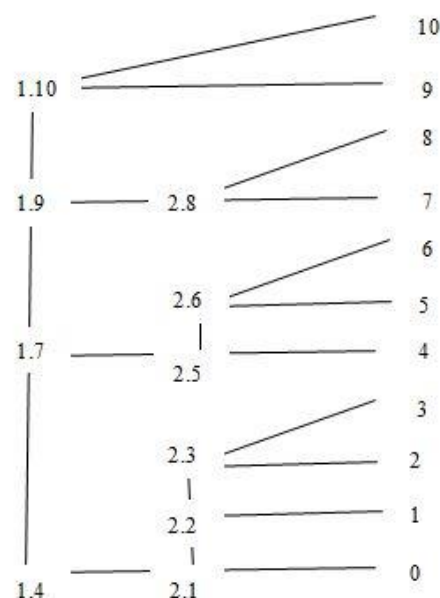
Hatte-problemer fins i mange varianter, både kompetitive og kooperative, se Brown & Tanton: A Dozen Hat problems, Math Horizons, April 2009. Versjonen ovenfor tilskrives Todd Ebert i Ph.D thesis University of California, Santa Barbara, 1998.

En takk til Per Manne som har bidratt til klargjøring av løsningen.

Pusleri nr. 38 (løsning)

Svaret er: Helt til topps!

Begrunnelse: Dersom man hadde bare ett egg, er det opplagt at man må starte i 1'te etasje, og gå oppover en etasje av gangen, så lenge egget ikke er knust, og med fire tillatte slipp kan vi avklare helt opp til 4de etasje. Med to egg vil det være optimalt å la første slipp gå fra 4de etasje. Dersom det knuser, har man et egg igjen som kan brukes til å avklare de tre etasjene under etter samme prinsipp som ovenfor. Dersom det første egget ikke knuses fra 4de etasje, brukes det på nytt fra 7de etasje. Dersom det knuses, har man to slipp igjen, og kan avklare hvilken av etasjene 5 og 6 det knuses med det andre egget. Dersom det første egget heller ikke knuses fra 7de etasje, hentes det opp og slippes fra 9de etasje, og dersom det knuses har vi ett slipp igjen, og kan bruke det andre egget til å slippe fra 8de etasje. Dersom det første egget ikke knuses fra 9de etasje, kan vi gjøre et siste slipp i 10de etasje. De mulige hendelsesforløp er her illustrert i et tre der sifrene ved hver splittnode er (eggnummer.etasjenummer).



Dersom det var en skyskraper og en spør om hvor langt opp en kan avklare med to egg og n tillatte slipp, er det klart at det er optimalt å slippe første egg fra n'te etasje, og så følge samme prinsipp som ovenfor. En vil da kunne nå opp til etasje $1+2+3+\dots+n=n(n+1)/2$, slik at $n=20$ gir etasje nr. 210.

Problemstillingen kan generaliseres til m egg og n slipp, og blir da straks noe mer komplisert. En løsning er gitt av Boardman, Mathematics Magazine, vol. 70, no.5, 368-372, som gir en rekursjonsformel med n og m og en løsning ved hjelp av genererende funksjoner. Vi har imidlertid fått en mer instruktiv løsning fra Jarle Tufto (NTNU) som bygger på at treet ovenfor er et såkalt binært søketre, som er en velkjent byggestein for diverse kompliserte datastrukturer. Dette innebærer at splittnodene i treet kan entydig nummereres på en slik måte at ved enhver slik node har nodene i venstre undertre (her opp) høyere numre og nodene i høyre undertre lavere numre, og denne egenskapen skal gjelde rekursivt for alle nye undertrær. I treet ovenfor svarer denne nummeringen til etasjen egget slippes fra, dvs annet siffer. Jarles generelle argumentasjon går slik: Den maksimale dybden til forgreninger i dette treet blir lik maksimalt antall tillatte kast n. Men treet blir skjevt fordi vi kun kan ha m negative utfall i hver forgrening av treet, idet vi har kun m egg til rådighet og knuste egg kan ikke slippes på nytt. Når vi kommer til enden av en bestemt forgrening (et «blad») gjør vi vår beslutning. Totalt antall etasjer som kan bestemmes (inkludert 0. etasje) blir derfor lik antall blad på treet. Den generelle løsningen for antall etasjer som funksjon av n og m (om vi altså teller med 0. etasje) blir

$$f(n, m) = \sum_{i=0}^m \binom{n}{i} \quad (1)$$

Dette kan vises ved følgende kombinatoriske argument. Hver forgrening i treet vil inneholde opptil m negative utfall (knuste egg). Ser vi på antall forgreninger som inneholder et gitt antall i negative utfall $i \leq m$, $i=0,1,\dots,m$, kan disse forgreningene dannes på tilsammen $\binom{n}{i}$ måter avhengig av når i løpet av de potensielt totalt n kastene de negative utfallene inntreffer. At vi for eksempel kun gjennomfører to kast dersom de negative utfallene inntreffer i de to første kastene endrer ikke på

dette argumentet. Summerer vi antall forgreninger gitt $i = 0, 1, \dots, m$ negative utfall kommer vi fram til (1).

Alternativt kan løsningen bevises ved induksjon. Etthvert tre består av to undertrær på en slik måte at

$$f(n, m) = f(n-1, m) + f(n-1, m-1) \quad (2)$$

Videre ser vi at antall blad når vi har ingen kast eller ingen egg igjen blir 1, slik at vi får randbetingelsene $f(0, m) = 1$ for $m = 1, 2, \dots$ og $f(n, 0) = 1$ for $n = 1, 2, \dots$. Bruker vi konvensjonen at $\binom{n}{i} = 0$ for $i < 0$ og $i > n$, ser vi at (1) også gjelder på randen for $m = 0$ eller $n = 0$. Anta at (1) gjelder for $(n-1, m)$ og $(n-1, m-1)$. Fra (2) følger da

$$\begin{aligned} f(n, m) &= f(n-1, m) + f(n-1, m-1) \\ &= \sum_{i=0}^m \binom{n-1}{i} + \sum_{i=0}^{m-1} \binom{n-1}{i} \\ &= \sum_{i=0}^m \left[\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1} \right] = \sum_{i=0}^m \binom{n}{i} \end{aligned}$$

Tredje overgang framkommer ved å forskyve summasjonsvariabelen i den andre summen og ved å utvide denne med leddet $\binom{n-1}{0-1} = 0$. Siste overgang følger da av addisjonsformelen for binomialkoeffisienten kjent fra Pascals trekant. Dermed må (1) gjelde for alle n og m .

For $n = 4$ og $m = 2$ som i oppgaven får vi $f(4, 2) = \binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} = 11$ blad, som svarer til at vi kan sortere ut sikker konklusjon for etasje 0 til og med 10.

[Innholdsliste](#)

[Pusleri nr. 39 \(løsning\)](#)

Ulike løsninger basert på rekursjoner eller basert på egenskaper ved ordningsobservatoren er mulig, men man kan ganske enkelt resonnerer slik: La $I_k=1$ dersom bil nr. k leder en gruppe (av en eller flere biler) og 0 dersom bil nr. k er ikke-ledende i en kolonne av to eller flere biler. Siden det er like mange grupper som ledere av grupper, søker vi forventningen til $S=I_1+I_2+\dots+I_n$. Nå vil bil nr. k lede en gruppe hvis og bare hvis den er den mest saktekjørende av de k første bilene, som skjer med sannsynlighet $1/k$. Følgelig er $E(I_k)=P(I_k=1)=1/k$, og derfor blir $E(S)=E(I_1+I_2+\dots+I_n)=E(I_1)+E(I_2)+\dots+E(I_n)=1+1/2+1/3+\dots+1/n$.

[Pusleri nr. 40 \(løsning\)](#)

Gitt antall krysninger n_i i intervallet $[0, t]$ er tidspunktene uniformt fordelt $[0, t]$. Da blir

$$(a) \ P(A|n_2 \text{ i } [0, t]) = (a_1 + a_2) \cdot \frac{n_2}{t}$$

$$P(A) = (a_1 + a_2) \cdot \frac{2\lambda_2 t}{t} = 2\lambda_2(a_1 + a_2)$$

$$(b) \ E(N|n_1 \ \& \ n_2 \text{ i } [0, t]) = (a_1 + a_2) \cdot \frac{n_1 n_2}{t}$$

$$E(N) = (a_1 + a_2) \cdot \frac{(2\lambda_1 t)(2\lambda_2 t)}{t} = 4\lambda_1 \lambda_2 (a_1 + a_2)t$$

Som ikke uventet gir forventet antall kollisjoner pr tidsenhet lik $4\lambda_1 \lambda_2 (a_1 + a_2)$.

Ved ulik fart erstatt $a_1 + a_2$ med $a_1 \frac{v_2}{v_1} + a_2$ i (a) og $\max(a_1 \frac{v_2}{v_1} + a_2, a_1 + \frac{v_1}{v_2} a_2)$ i (b)

[Pusleri nr. 41 \(løsning\)](#)

Løsningen bygger på at, gitt at alle kastene er ulike, så er alle $6!$ ordninger av utfallene like sannsynlige. Ulempen med denne løsningen er at vi risikerer å holde på ganske lenge. En «raskere» løsning er:

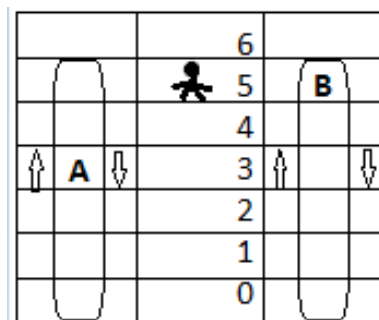
Navngi de seks sidene på terningen med bokstavene A, B, C, D, E, F. Resultatet av et antall terningkast danner da et «ord». Ulike ord kan da ordnes leksikografisk.

1. Start med å trille terningen tre ganger, og noter ordet. Er vi heldige er det tre ulike bokstaver i ordet, f.eks ECA. Dette er et av i alt seks ulike ord som som fås ved permutasjoner av de tre bokstavene, i leksikografisk rekkefølge er disse ACE, AEC, CAE, CEA, EAC, ECA. Disse seks ordene må være like sannsynlige. Hvis vi på forhånd har fastlagt at ordets plass i rekkefølgen bestemmer utfallet 1,2,3,4,5 eller 6. Siden vi fikk ECA, som kommer leksikografisk sist, har vi fått utfallet «6 øyne» simulert med sannsynlighet $1/6$. Dette gjelder uansett hvilke tre ulike bokstaver ordet består av.
2. Er vi mindre heldige får vi et ord med tre like bokstaver, f.eks AAA. Dette gir ingen informasjon, og vi starter på nytt med tre nye kast.
3. Er vi sånn passe heldige, får vi et ord med to like bokstaver, f.eks CAA. Dette er ett av i alt tre ulike ord, i leksikografisk rekkefølge AAC, ACA, CAA, som må være like sannsynlige. På forhånd har vi bestemt at ordets plass i rekkefølgen peker på en av de tre mengdene {1 øyne, 2 øyne}, {3 øyne, 4 øyne}, {5 øyne, 6 øyne}. Når vi fikk ordet CAA betyr det at utfallet er i den siste mengden, altså 5 eller 6 øyne. Alt vi nå trenger, er en rettferdig trekning for hvilken av de to i den aktuelle mengden som skal velges. Dette kan skje ved to nye terningkast, med resultat f.eks FE. Dette er et av to mulige ord, i leksikografisk rekkefølge, EF, FE, som er like sannsynlige. At vi fikk den siste i rekkefølgen FE betyr det at vi velger den siste i vår mengde, altså 6 øyne. Dersom de to terningkastene skulle vise likt resultat, overser vi det, forsøker med to nye kast og følger samme rutine.

Det er forholdsvis liten sjanse for at vi trenger mange skjeve kast for å simulere et enkelt rettferdig kast. Det er ikke vanskelig å beregne forventet antall nødvendige kast dersom terningen i virkeligheten er rettferdig (selv om den ser rar ut). Den er $144/35=4.114$. Det er mulig å oppnå enda lavere forventning ved å kombinere informasjonen fra de to trinnene. En variant gir forventning 4.09, og det fins tabellariske løsninger med forventning ca. 3.60.

[Pusleri nr. 42 \(løsning\)](#)

Med en heis er opplagt svaret $1/6$, og påberoper vi uavhengighet får vi at sannsynligheten for at minst en går ned er $1/6 + 1/6 - 1/6 \cdot 1/6 = 11/36$. Vel er begivenhetene «A kommer ned» og «B kommer ned» uavhengige, men vi trenger de disjunkte begivenhetene «A kommer først og går ned» og «B kommer først og går ned». Et kjapt resonnement tar utgangspunkt i figuren, der tallene representerer gulvnivåer: Skal A komme først og gå ned, må A være mellom 5 og 6 på opptur eller nedtur, samtidig som B holder seg unna et like stort område. Tilsvarende for B. Med antakelsen om uavhengighet mellom heis A og heis B blir den søkte sannsynlighet $1/6 \cdot 5/6 + 1/6 \cdot 5/6 = 10/36 = 5/18$. Det området B må holde seg unna er posisjoner på nedtur mellom 6 og 5 foran A eller posisjoner på opptur mellom 3 og 5, tilstrekkelig nær 5, slik at B når nivå 5 på opptur før A har nådd 5 på nedtur. Tilsammen utgjør det $2/12 = 1/6$ av syklusen.



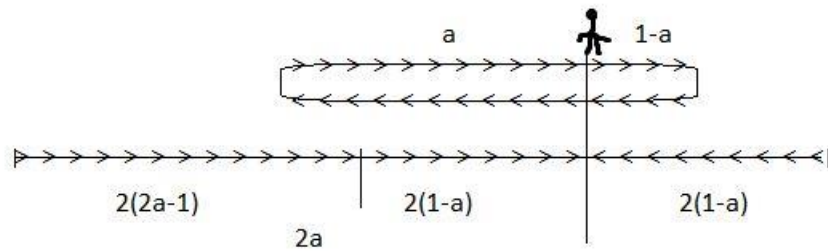
Løsningen ovenfor har den svakhet at den ikke lar seg lett utvide til mer enn to heiser. Eksempelvis med tre heiser nytter det ikke å argumentere at vi nå får tre ledd med $(5/6)^2$ istedenfor $5/6$, idet vi i den betingede kontekst, gitt en bestemt heis kommer først og ned, ikke lenger har uavhengighet for de to andre heisenes plassering.

Problemstillingen tilskrives Gamov & Stern (1958), med løsning som senere ble korrigert av D. Knuth (1968). Han gir en komplisert løsning (med integraler og rekursjoner) og en enkel geometrisk løsning. Her følger to nye løsninger, en analytisk og en geometrisk.

Løsning (Lillestøl): Betrakt heisposisjonen X i intervallet $[0,2)$, der 0 representerer bunn og 1 topp. Hansens høyde over bakken er $a=5/6$, representert ved heisposisjonene a (opptur) og $2-a$ (nedtur). En gunstig situasjon for Hansen er en heis i posisjon x i intervallet $(a, 2-a)$, ingen heis i intervallet $(x, 2-a)$, ingen i intervallet $(x-2, a)$, dvs. tilsammen ingen i område av lengde $2(2-a-x)$ og $n-1$ heiser hvor som helst ellers, dvs i område av lengde $2(a+x-1)$. Sannsynligheten for X i $(x, x+dx)$ er da trinomisk fordelt, slik at tettheten til X er gitt ved $f(x)dx = n (2(2-a-x))^{n-1} (2(a+x-1))^0 (1/2)dx$, dvs. $f(x) = n(a+x-1)^{n-1}$. Integreres dette fra a til $2-a$ får vi $(1-(2a-1)^n)/2$. For $a=5/6$ blir dette $1/2 \cdot (1-(2/3)^n)$ og med $n=2$ blir dette $5/18$, som ovenfor.

En annen løsning følger på neste side...

Løsning (Per Manne): Løkken i figuren nedenfor illustrerer heisen fra bunn (0) til topp (1) og ned igjen, der Hansen står på nivå $a=5/6$. Klipp opp løkken der Hansen står, brett ut, og rett pilene slik at de samsvarer med hvordan heisene nærmer seg Hansen. Når Hansen passerer «hopper» heisen til motsatt enda og nærmer seg Hansen på nytt derfra.



Utbrettet har vi et linjestykke av lengde 2, delt i tre områder: venstre(V), midt (M) og høyre (H) med lengder henholdsvis $2(2a-1)$, $2(1-a)$, $2(1-a)$. Det gunstige for Hansen er minst en heis i område H, samtidig som ingen heis er nærmere i område M. Med antakelsen om at n heiser er plassert som n uavhengige rektangulærfordelte $[0,2]$ variable blir sannsynligheten

$$P(\text{minst en heis i område M eller H}) = 1 - P(\text{alle heisene i område V}) = 1 - (2a-1)^n.$$

Gitt minst en heis i området (M eller H) er det på grunn av symmetrien like sannsynlig at den eller den første av flere kommer i M (opp) som i H (ned). Den søkte sannsynlighet er altså $1/2 \cdot (1 - (2a-1)^n)$.

[Innholdsliste](#)

[Pusleri nr. 43 \(Løsning\)](#)

Den går like greit med 2^n lag over n runder med $K=1+2+4+\dots+2^{n-1}=2^n-1$ kamper. Nummerér kampene etter et fritt valgt prinsipp, slik at den totale gevinst er $G=G_1+G_2+\dots+G_K$.

Betrakt kamp nr. k svarende til runde $r=r(k)$ med gevinst $G_k=2^{r(k)-1} \cdot I_k$, der

$I_k = 1$ (0) dersom utfallet av kamp nr. k er tippet riktig (feil)

For å tippe riktig vinner av kamp nr. k i runde $r(k)$ må også alle kampene som involverer dette laget i rundene før være riktig tippet. Vi får derfor

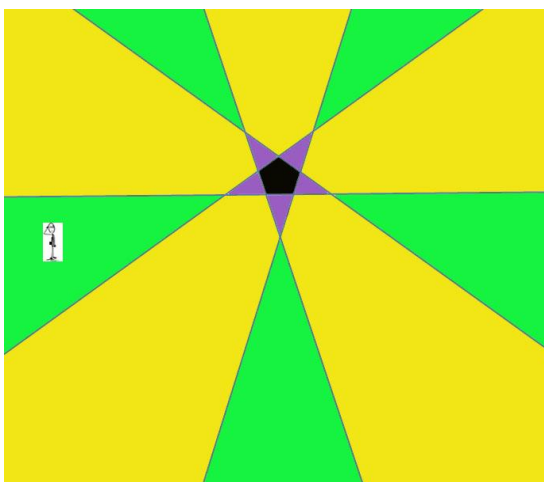
$E(I_k) = P(I_k=1) = 1/2^{r(k)}$, slik at $E(G_k) = 2^{r(k)-1} \cdot E(I_k) = 2^{r(k)-1} \cdot (1/2^{r(k)}) = 1/2$ uansett k . Derfor blir

$$E(G) = E(G_1 + G_2 + \dots + G_K) = E(G_1) + E(G_2) + \dots + E(G_K) = K \cdot (1/2) = (2^n - 1)/2$$

For $n=5$ gir dette $E(G)=15.5$.

[Pusleri nr. 44 \(løsning\)](#)

I figuren nedenfor er trukket linjer i forlengelsen av sidene i femkanten, og fra de gule områdene sees to sider av bygningen og fra de grønne områdene tre sider. Vi ser at planet er dekket av 10 vinkelsektorer, hver på 36° , fem grønne og fem gule. De gule overlapper innen stjernen, som vi betrakter som liten. Det er gitt at Per er i det grønne eller i det gule området, som vi derfor betrakter tilnærmet like store, slik at sannsynligheten for at Per ser akkurat tre sider er tilnærmet $\frac{1}{2}$.



Bonusspørsmålet: Av Per sitt utsagn kan vi slutte at han befant seg i grønt område med kurs mot bygningen til han har nådd en av stjernespissene. Ut fra bemerkningen om blendet av morgensol, kan vi slutte at han må ha kommet inn fra vest, og ut fra oppgitt sidelengde 314 meter på bygningen regnes lett ut at avstanden fra bygningen er 483 meter. Av et kart over Washington ser vi at figuren må dreies ørlite med urviserne, og at Per trolig må befinne seg inne på Arlington-kirkegården.

Merknad (av Per Manne). Matematisk sett er sammenligninger av uendelige områder i planet ikke uproblematisk. I en norsk geometribok av Bernt Michael Holmboe fra 1827 fins et «bevis» for Euklids parallellpostulat, basert på en ikke tillatt arealsammenligning av vinkelsektorer med ensidig uendelige parallelstriper. «Beviset» er trolig hentet fra en bok som Abel hadde fått fra Crelle, som hans lærer Holmboe tok vare på og leste mens Abel var på reise i Europa.